

Варианты задач вступительных экзаменов по математике 1999 года

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов. Три задачи различного уровня трудности требуют знания алгебры и тригонометрии. Еще две задачи проверяют знание планиметрии и стереометрии, а также умение мыслить объемными категориями.

Продолжительность экзамена – пять астрономических часов.

Задачи

Абитуриентам, поступающим на физический факультет, в марте 1999 года предлагались варианты задач по математике 31 и 32, в июле – варианты 33 и 34. Варианты вступительных экзаменов за прошлые годы имеются в разделе *Абитуриенты* на сайте физического факультета НГУ в Интернете по адресу <http://www.phys.nsu.ru/entrants>.

Вариант 31

1. Решить неравенство $|x^2 - 5x + 4| > x - 3$.
2. Решить уравнение $\frac{1 + 2 \cos 2x}{\cos x} = \frac{1 - 4 \cos^2 x}{\cos 3x}$.
3. Дан тупоугольный равнобедренный треугольник площади $3\sqrt{15}$. Известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, имеет длину 6. Найти стороны треугольника.
4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{2\lg x} = 5^{\lg y}, \\ 5^{\lg^5 x} \cdot y^{\lg^4 x} = 2^{4\lg^2 x} \cdot x^{\lg^5 x}. \end{cases}$$
5. Для данного тетраэдра $ABCD$ на лучах AC и BD выбраны соответственно точки E и F таким образом, что $AE:AC=3:2$, $BF:BD=4:3$. Через точки E , F и середину ребра AB проведена плоскость. В каком отношении она делит ребро CD ?

Вариант 32

1. Решить неравенство $|x^2 - 7x + 10| < 3 - x$.
2. Решить уравнение $\frac{1 - 2 \cos 2x}{\sin x} = \frac{3 - 4 \cos^2 x}{\sin 3x}$.

3. Дан равнобедренный треугольник площади $9\sqrt{7}$. Известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, равна основанию треугольника. Найти длину этой медианы.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 9^{\lg x} = 1/4^{\lg y}, \\ 4^{\lg^4} \cdot y^{2\lg^3} = 9^{\lg^9} / x^{\lg^4}. \end{cases}$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точка E делит ребро CD в отношении 1:2, считая от вершины C . Точка F лежит на луче BS так, что $BF:BS=6:5$. Через точки E, F и середину ребра AS проведена плоскость. В каком отношении она делит отрезок AC ?

Вариант 33

1. Решить неравенство $|x^2 - 2x - 3| > 2x - 2$.

2. Решить уравнение
$$\frac{1 + 2 \cos 2x}{\cos 3x} = \frac{4 \cos^2 x - 1}{\cos x}.$$

3. Дан равнобедренный треугольник периметра 16. Известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, имеет длину $\sqrt{17}$. Найти стороны треугольника.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3^{2\lg x} = 7^{\lg y}, \\ 7^{\lg^7} \cdot y^{2\lg^3} = 3^{4\lg^3} \cdot x^{\lg^7}. \end{cases}$$

5. Для данного тетраэдра $ABCD$ на лучах AC и BD выбраны соответственно точки K и L таким образом, что $AK:AC=7:5$, $BL:BD=4:3$. Через точки K, L и середину ребра CD проведена плоскость. В каком отношении она делит ребро AB ?

Вариант 34

1. Решить неравенство $|x^2 - 4x - 5| < 4 - 2x$.

2. Решить уравнение
$$\frac{2 \cos 2x - 1}{\sin 3x} = \frac{3 - 4 \cos^2 x}{\sin x}.$$

3. Дан остроугольный равнобедренный треугольник. Известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, имеет длину 6 и образует с ней угол величиной $\arccos(13/20)$. Найти стороны треугольника.

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{2\lg x} = 1/5^{\lg y}, \\ 5^{\lg^5} \cdot y^{\lg^4} = 4^{\lg^4} / x^{\lg^5}. \end{cases}$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точка K делит ребро CD в отношении 3:1, считая от вершины C . Точка L лежит на луче AS так, что $AL:AS=5:3$. Через точки K, L и точку пересечения диагоналей основания проведена плоскость. В каком отношении она делит ребро BS ?

Ответы

Вариант 31

1. $x < 2 + \sqrt{3}$ или $x > 3 + \sqrt{2}$. 2. $x = \pm(\pi/3) + k\pi$ или $x = \pm(\pi/4) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{15}$. 4. $x = 5$, $y = 4$. 5. 4:3, считая от вершины C .

Вариант 32

1. $3 - \sqrt{2} < x < 4 - \sqrt{3}$. 2. $x = \pm(\pi/6) + k\pi$ или $x = \pm(\pi/4) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. 6. 4. $x = 1/4$, $y = 9$. 5. 3:7, считая от вершины A .

Вариант 33

1. $x < \sqrt{5}$ или $x > 2 + \sqrt{5}$. 2. $x = (\pm \pi/3) + k\pi$ или $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. 6, 6. 4. $x = 7$, $y = 9$. 5. 7:8, считая от вершины A .

Вариант 34

1. $1 - \sqrt{10} < x < 3 - \sqrt{10}$. 2. $x = \pm(\pi/6) + k\pi$ или $x = (\pi/2) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. 10, 10, $\sqrt{22}$. 4. $x = 1/5$, $y = 4$. 5. 6:5, считая от вершины S .

Решения, указания

Вариант 31

1. 1) Если $x \leq 1$ или $x \geq 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4 > x - 3$,

$$x^2 - 6x + 7 > 0, \quad x < 3 - \sqrt{2} \quad \text{или} \quad x > 3 + \sqrt{2}.$$

Поэтому $x \in (-\infty, 1] \cup (3 + \sqrt{2}, \infty)$.

2) Если $1 < x < 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = -x^2 + 5x - 4 > x - 3$, $x^2 - x + 1 < 0$, $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$. Поэтому $x \in (1, 2 + \sqrt{3})$

Ответ: $x < 2 + \sqrt{3}$ или $x > 3 + \sqrt{2}$.

2. Легко заметить, что числители различаются только знаком. Действительно: $1 + 2 \cos 2x = 1 + 2(\cos^2 x - 1) = 4 \cos^2 x - 1$. Поэтому

1) $4 \cos^2 x - 1 = 0$, $\cos x = \pm 1/2$, $x = \pm (\pi/3) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. При этом $\cos x \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$.

2) $\frac{-1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 3x}$, $\cos 3x + \cos x = 0$, $2 \cos 2x \cdot \cos x = 0$. Поскольку $\cos x \neq 0$, то $\cos 2x = 0$, $2x = (\pi/2) + k\pi$, $x = (\pi/4) + k\pi/2$

или $x = \pm(\pi/4) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. При этом знаменатели исходного уравнения не обращаются в нуль.

Ответ: $x = \pm(\pi/3) + k\pi$, $x = \pm(\pi/4) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Используя обозначения рисунка, по теореме косинусов для треугольников ABM и ACM имеем

$$4x^2 = x^2 + 36 - 12x \cos \alpha,$$

$$4y^2 = x^2 + 36 + 12x \cos \alpha.$$

Складывая, получаем

$$4(x^2 + y^2) = 2x^2 + 72, \quad x^2 = 36 - 2y^2.$$

Теперь используем условие на площадь:

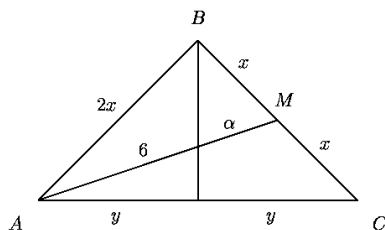
$$\frac{1}{2} \cdot 2y \cdot \sqrt{4x^2 - y^2} = 3\sqrt{15},$$

$y^2(4x^2 - y^2) = 9 \cdot 15$. Заменяя в этом уравнении x^2 на его выражение через y^2 , получим биквадратное уравнение от переменной y . Решая его, найдем

$y = 1$ или $y = \sqrt{15}$. Соответственно, $x = \sqrt{34}$ или $x = \sqrt{6}$. Треугольник ABC

тупоугольный, следовательно, $AB^2 + BC^2 < AC^2$. Этому условию удовлетворяет только второе решение.

Ответ: $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{15}$.



4. Если прологарифмировать оба уравнения по основанию 10, то получится система двух линейных уравнений относительно $\lg x$ и $\lg y$. Нужно выразить $\lg y$ из первого уравнения, подставить во второе и сократить на общий нену-

левой множитель. Получится равенство $\lg x = \lg 5$, $x = 5$. Ответ: $x = 5$, $y = 4$.

5. Построим последовательно точки K , X , L , Y так, что $CX \parallel AB$, $DY \parallel BC$ (см. рис.). Тогда треугольники AME и CXE подобны, треугольники MBK и XCK также подобны. Из подобия:

$$\frac{CK}{BK} = \frac{CX}{BM} = \frac{CX}{AM} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{3}.$$

Теперь из подобия треугольников LDY и LCK , а также треугольников FDY и FBK получаем равенства

$$\frac{DL}{CL} = \frac{DY}{CK} = \frac{DY}{BK/3} = 3 \cdot \frac{DY}{BK} = 3 \cdot \frac{DF}{BF} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: 4:3, считая от вершины C .

