

Варианты задач вступительных экзаменов по математике 1998 года

Вариант 31

1. Решить неравенство: $2x - 6 \leq \sqrt{x^2 - 3x + 6}$.
2. Решить уравнение: $\log_{2/5} x + \log_5 x = \log_x (1/2)$.
3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC. На стороне AB выбрана точка M так, что $BM=BC$. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника AMC, равен $2\sqrt{5}$, $AC=5\sqrt{3}$. Определить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.
4. Решить уравнение: $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin 7x$.
5. В кубе ABCDA'B'C'D', ребра которого имеют длину 1, точка M – середина ребра BC. Точка P на прямой A'C' и точка Q на прямой B'M выбираются так, что прямая PQ параллельна плоскости AA'B'B. Определить длину наименьшего из всех возможных отрезков PQ.

Вариант 32

1. Решить неравенство: $2x - 8 \geq \sqrt{x^2 - 5x + 40}$.
2. Решить уравнение: $\log_3 x + \log_x (1/2) = \log_6 x$.
3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC. На продолжении стороны AB выбрана точка M так, что $BM=BC$ (точка B лежит между M и A). Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4, $AC=\sqrt{15}$. Определить радиус окружности, описанной около треугольника AMC.
4. Решить уравнение: $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \cos 9x$.
5. В кубе ABCDA'B'C'D', ребра которого имеют длину 2, точка M – середина ребра A'D'. Точка P на прямой B'D и точка Q на прямой BM выбираются так, что прямая PQ параллельна плоскости CC'D'D. Определить длину наименьшего из всех возможных отрезков PQ.

Ответы и решения

Вариант 31

1. Нетрудно проверить, что подкоренное выражение $x^2 - 3x + 6$ положительно при всех x , поэтому область допустимых значений аргумента совпадает с $(-\infty, +\infty)$. Так как арифметический корень неотрицателен, то неравенство заведомо выполняется, когда $2x - 6 < 0$, т.е. $x < 3$. Следовательно, полупрямая $(-\infty, 3)$ выходит в множество решений неравенства. Пусть $x \geq 3$. В этом случае обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат. Получим стандартное квадратное неравенство

$$(2x - 6)^2 \leq x^2 - 3x + 6 \text{ или } 3(x^2 - 7x + 10) \leq 0,$$

решением которого является промежуток $[2; 5]$. Учитывая условие $x \geq 3$, находим: $x \in [3; 5]$. Объединив промежутки $(-\infty, 3)$ и $[3; 5]$, получим полное решение задачи.

Ответ: $(-\infty, 5]$.

2. Сразу отметим, что на основании свойств логарифмической функции необходимы ограничения $x > 0$ и $x \neq 1$. Приходя теперь к логарифмам по основанию 5, получаем

$$\log_5 x \cdot \left(\frac{1}{\log_5(2/5)} + 1 \right) = -\frac{\log_5 2}{\log_5 x};$$

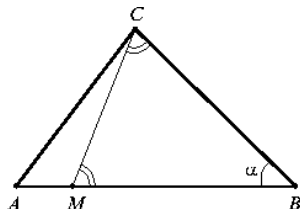
$$\frac{\log_5^2 x \cdot \log_5 2}{\log_5(2/5)} = -\log_5 2;$$

$$\log_5^2 x = -\log_5(2/5) = \log_5(5/2).$$

Таким образом, $\log_5 x = \pm \sqrt{\log_5(5/2)}$, $x = 5^{\pm \sqrt{\log_5(5/2)}}$. Найденные корни удовлетворяют условиям $x > 0$ и $x \neq 1$. Ответ: $5^{\pm \sqrt{\log_5(5/2)}}$.

3. Пусть $\angle B = \alpha$. Так как треугольник BMC равнобедренный, то $\angle MCB = \angle CMB = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$

и $\angle AMC = \pi - \angle CMB = \frac{\pi + \alpha}{2}$. Из треугольника AMC по теореме синусов получаем



$$\sin \angle AMC = \sin \frac{\pi + \alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{2 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Следовательно

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{16}, \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Применим теперь теорему синусов к треугольнику ABC и найдем искомый радиус R описанной окружности:

$$R = \frac{AC}{2 \sin \alpha} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{15}/8} = 4\sqrt{5}.$$

Ответ: $4\sqrt{5}$.

4. Разделив исходное уравнение на 2, перепишем его в виде

$$\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \sin 7x.$$

Заметим, что $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, поэтому

$$\sin 7x = \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} = \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\sin 7x - \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 0.$$

Преобразуя разность синусов в произведение, получаем

$$2 \cos \left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin \left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

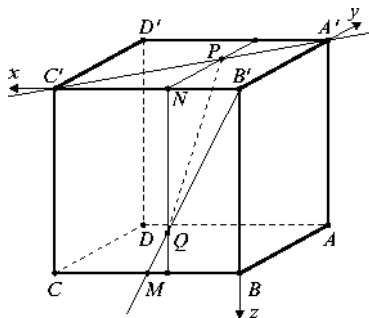
Приравнивая нулю каждый из сомножителей, находим две серии корней

$$\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x = \frac{4\pi}{27} + \frac{2\pi k}{9}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{6} = \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{4\pi}{27} + \frac{2\pi k}{9}$; $x = -\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$, $(k, n \in \mathbb{Z})$.

5. Введем систему координат с началом в точке B' , оси Ox , Oy , Oz которой направлены вдоль лучей $B'C'$, $B'A'$, $B'B$ соответственно. Через отрезок PQ проведем плоскость π , параллельную грани $AA'B'B$. Понятно, что эта плоскость пересечет плоскость грани $A'B'C'D'$ по некоторой прямой PN , параллельной $A'B'$, а плоскость грани $BB'C'C$ – по прямой QN , параллельной прямой BB' .



Пусть x – абсцисса точки N .

Уравнение прямой $A'C'$ в плоскости

Oxy есть $x+y=1$. Абсцисса точки P также равна x , а ее ордината находится из этого уравнения: $y=1-x$. Таким образом, $P=(x, 1-x, 0)$. Аналогично, абсцисса точки Q равна x , уравнение прямой $B'M$ в плоскости Oxz есть $z=2x$, аппликата точки Q равна $2x$ и $Q=(x, 0, 2x)$.

По формуле расстояния между двумя точками имеем

$$PQ^2 = 4x^2 + (1-x)^2 = 5x^2 - 2x + 1 = 4(x - \frac{1}{5})^2 + \frac{4}{5}.$$

Отсюда

$$x_{\min} = \frac{1}{5}, \quad PQ_{\min}^2 = \frac{4}{5}, \quad PQ_{\min} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Вариант 32

1. $[8, +\infty)$.

2. $3^{\pm\sqrt{\log_3 6}}$.

3. $2\sqrt{5}$.

4. $-\frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}$; $\frac{\pi}{60} + \frac{n\pi}{5} (k, n \in \mathbb{Z})$.

5. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.