

# ВОЛНОВАЯ ФИЗИКА

Курс лекций для ФМШ

Часть 1. ОПТИКА И ВОЛНЫ

4. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. П. Ершов

30 марта 2005 г.

## Глава 4

# ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### 4.1 Принцип относительности Эйнштейна. Предельная скорость

Мы не раз пользовались переходом в разные инерциальные системы отсчета. Многие явления выглядят проще не в «нашей родной» (лабораторной), а именно в какой-то движущейся относительно нас системе. Допустим, удар по мячу – в системе ноги футболиста ( $V$  относительно лабораторной), где мяч просто меняет знак скорости ( $-V \Rightarrow V$ ). Вернувшись в лабораторную систему, находим скорость отскока  $2V$ , что не так очевидно сразу. Многие на экзамене отвечают, что мяч отлетает со скоростью  $V$ .

Принцип относительности впервые выдвинул Галилей (1610). По этому принципу, все явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Сидя в корабле, нельзя узнать, движется ли он относительно берега (если, конечно, не выглядывать наружу). Качание маятников, соударения, работа механизмов и т.д. в «движущемся» корабле происходят так же, как в «неподвижном». Само понятие «движется» бессмысленно, пока не указано, относительно чего. В пространстве нет никаких колец или гвоздей, которые помогли бы нам уловить абсолютное движение. Такие метки бывают только на телах, с которыми и связывают системы отсчета.

В классической механике с принципом относительности Галилея тесно связаны преобразования Галилея (ПГ):

$$\begin{cases} x' = x - Vt, \\ t' = t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' + Vt', \\ t = t'. \end{cases}$$

В лабораторной системе имеем событие  $(x, t)$ , то есть в точке  $x$  в момент  $t$  что-то произошло, хотя бы извержение вулкана. Тогда в штрихованной системе (на корабле), имеющей скорость  $V$  относительно лабораторной, координата того же события будет  $x'$ , а время  $t'$  (по Галилею – то же самое). Подразумевается для простоты, что в обеих системах синхронизованы часы и в нулевой момент начала координат совпадают. Пре-

образования помогают, описав явление – последовательность событий – в одной системе отсчета, перенести результаты в другую. Согласно принципу относительности, основное уравнение механики – второй закон Ньютона – должен быть инвариантным по отношению к ПГ. Поскольку ускорение – производная от скорости, постоянная скорость «сноса»  $V$  не сказывается, и для инвариантности достаточно, чтобы силы не зависели от системы отсчета. Мы уже пользовались таким условием в механике.

Из ПГ следует известная формула сложения скоростей. Если на корабле бежит матрос,  $x' = u't'$ , то в лабораторной системе  $x = x' + Vt' = (u' + V) \cdot t' = (u' + V) \cdot t$ , скорость  $u = u' + V$ .

Если ограничиваться механикой, преобразований Галилея «хватило бы» еще долго. Но мы уже знаем пример, противоречащий этим преобразованиям. Электромагнитная волна имеет скорость, равную электродинамической постоянной  $c$ , введенной в уравнения Максвелла вначале просто для уравнивания размерностей и единиц полей  $E$  и  $H$ . Из вывода (Электродинамика, п. 5.4) следует, что скорость одна и та же в любой системе отсчета, потому что волна может распространяться в пустоте, а токи и заряды нужны только вначале – для возбуждения волны. Контур, пересекаемый фронтом волны, рисуется во всех системах одинаково, и скорость фронта всегда будет  $c$ .

Либо ПГ, либо уравнения Максвелла неправильны. В поддержку уравнений Максвелла приведем аргумент **близкодействия**. Конечная скорость распространения взаимодействий есть результат локального действия через поле в данной точке. Если сдвинуть заряд в другой галактике, то сначала вокруг него изменится поле, потом это изменение распространится дальше, а мы почувствуем это, может быть, через миллионы лет. В 1987 г. наблюдался взрыв сверхновой 1987А в Большом Магеллановом облаке; это значит, что звезда взорвалась примерно 200000 лет назад – в 198013 году до н.э.

ПГ, с их сложением скоростей, никак не ограничивают скорость распространения сигнала. Это согласуется с противоположной идеей **дальнодействия**: непосредственно через пространство и с какой угодно, возможно бесконечной, скоростью. Принципиально были бы возможны сообщения быстрее света, причем каждая частица Вселенной могла бы чувствовать все другие мгновенно.

Может быть, электродинамика это исключение, а все остальные силы (тяжесть, ядерные и т.д.) дальнодействующие? Во-первых, наш мир в основном электрический – механика, молекулярная физика, химия и биология основаны, хотя не всегда это наглядно, на взаимодействиях зарядов. Но, кроме того, опыт показывает, что и все основные силы – близкодействующие.

Яркий пример нарушения галилеевского сложения скоростей – парадокс двойных звезд. Пусть далеко от Земли имеется двойная звездная система, в которой звезды вращаются вокруг общего центра масс с периодом  $T \approx 1$  год. Это отнюдь не экзотика: большинство звезд входит в состав кратных систем. Рассмотрим последствия очень естественной, хорошо согласующейся с бытовым здравым смыслом **баллистической гипотезы** – пусть скорость света складыва-

ется со скоростью источника, по Галилею. Выберем систему, видную с ребра, в которой звезды движутся попеременно к нам или в обратном направлении. С расстояния  $L$  свет удаляющейся звезды дойдет по баллистической гипотезе за время  $t_1 = L/(c - V)$ , а когда она же будет приближаться, пройдя половину орбиты, мы увидим сигнал через  $t_2 = T/2 + L/(c + V)$ . Разность этих времен  $t_2 - t_1 = T/2 - 2LV/(c^2 - V^2)$  при достаточном расстоянии  $L$  может быть отрицательной – более поздний сигнал придет раньше из-за большей скорости распространения. Мы увидели бы, как звезда носится по орбите со скоростью, никак не согласующейся с законами Кеплера, особенно если  $t_2 - t_1$  близко к нулю.

Поучительно рассмотреть не только два момента, а всю динамику видимого движения звезды. Как видно из рис. 4.1, для момента  $t$  «баллистическая скорость»  $c_x = c - V \sin(\omega t)$ . Время прихода света с расстояния  $L$

$$t_1 = t + \frac{L}{c - V \sin(\omega t)} \approx t + \frac{L}{c} + \frac{LV}{c^2} \sin(\omega t).$$

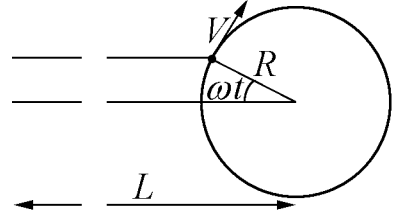


Рис. 4.1.

Большое постоянное слагаемое  $L/c$  можно отбросить (это просто выбор летоисчисления – начала отсчета времени наблюдения). Тогда время  $t_1$  как функция времени  $t$  будет суммой линейной функции и синусоиды. При небольших расстояниях  $L$  роль синусоиды невелика,  $t_1 \approx t$ , и движение звезды выглядит «нормальным»: ее координата  $y$  колеблется, как и положено при вращении:  $y = R \sin(\omega t_1)$ . Конечно, **видим** мы зависимость именно от времени **наблюдения**  $t_1$ .

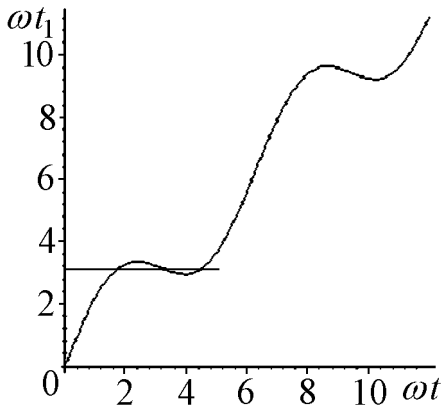


Рис. 4.2.

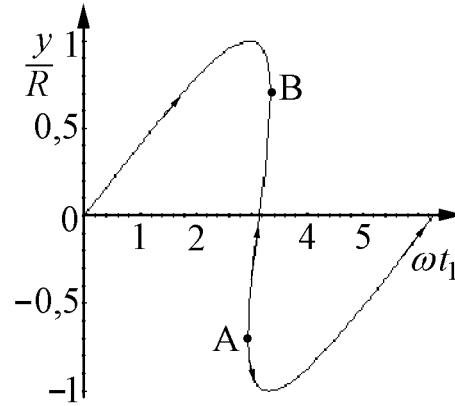


Рис. 4.3.

С ростом  $L$  увеличивается амплитуда синусоиды, и положение меняется. На рис. 4.2 показана зависимость  $t_1(t)$  для  $L = 1,4c^2/\omega V$ . Каждому времени наблюдения отвечает горизонтальная линия, а ее пересечения с кривой определяют фазу, в которой видна звезда. Обратим внимание на промежуток  $2,9 < \omega t_1 < 3,3$ . Здесь есть три пересечения горизонтали с кривой, следовательно, звезда видна в трех положениях одновременно.

Попробуем описать, что видит наблюдатель. Самое левое пересечение – это «нормальное» решение, продолжающее более ранний ход событий. Но в момент  $\omega t_1 \approx 2,9$  «возникает» еще одна звезда и тут же раздваивается. На рис. 4.3, где показана зависимость вертикальной координаты от времени наблюдения, новое изображение возникает в точке А. Один из фантомов

летит навстречу первому изображению, а второй движется в прямом направлении, причем в момент возникновения скорость обоих бесконечна. При  $\omega t_1 \approx 3,3$  пятящийся фантом аннигилирует с тем, который мы считали нормальным (точка В), и остается только одно видимое изображение звезды. Надо полагать, что теперь оно и будет «нормальным».

Заметим, что выбранное расстояние можно записать и как  $L = cT \cdot (1,4c/2\pi V)$ . Здесь  $cT$  – это примерно световой год. В скобке стоит число довольно значительное – порядка  $1,4 \cdot 3 \cdot 10^5 / (2\pi \cdot 30) \approx 2200$ , столько будет световых лет. Но астрономически это не такое большое расстояние, и с него звезды отлично можно наблюдать. Точнее, на таких расстояниях звезды видны хорошо, но телескоп не разделяет детали кратных систем: видна одна яркая точка вместо двух. Тем не менее можно различать отдельные компоненты по их спектрам (так называемые спектрально-двойные звезды). Свет звезды, движущейся по направлению к Солнечной системе, становится более коротковолновым, а удаляющейся – длинноволновым (эффект Доплера). Легко показать (в качестве упражнения сделайте это сами), что относительное изменение длины волны пропорционально продольной скорости:  $\Delta\lambda/\lambda = V \sin(\omega t)/c$ . Поэтому наблюдаемый сдвиг спектра зависит от времени наблюдения так же, как поперечная координата (изображенная на рис. 4.3 зависимость), в частности, будут появляться и исчезать «лишние» источники. При большем удалении можно было бы увидеть пять, семь и т.д. изображений одновременно, если бы была правильна баллистическая гипотеза. Таких чудес на небе не нашли. Пришлось признать, что **скорость света не зависит от движения источника**.

Баллистическая гипотеза неявно заменяет свет потоком песчинок или горошин. Но свет – это электромагнитная волна, вещь совсем другая. Лучи света могут интерферировать (например, гасить друг друга, если направления полей от двух источников противоположны) и дифрагировать (огibtать препятствия). Такие явления несвойственны летящим горошинам. Не удивительно, что баллистическая гипотеза не работает. Чем же ее заменить? По аналогии с упругими волнами ожидали, что световые волны распространяются в специальной среде (эфире), как звук – в воздухе. Предполагалось, что эфир нужен только для электромагнитных волн, что он не имеет заметной плотности и не оказывает сопротивления движению тел в том смысле, что свободно через них протекает. (Сейчас понятно, что это довольно странный набор свойств). Тогда движение источника и не должно влиять на скорость света, поскольку, оторвавшись от источника, свет шел бы по эфиру. Система отсчета, связанная с эфиром, явно выделена, как в акустике – система Земли, в которой неподвижна атмосфера.

Но тогда должны складываться скорости света и приемника. Майкельсон и Морли (1887) поставили решающий опыт, чтобы измерить скорость Земли относительно эфира, но никакого движения найти не удалось. Для измерений был изобретен новый прибор – **интерферометр** (рис. 4.4). На пути луча света стоит полупрозрачное зеркало  $M$ . Свет частично проходит через  $M$  прямо, отражается от хорошего зеркала  $M_1$  и снова от  $M$  отражается вниз на рисунке к экрану  $S$ . Другая часть света отражается вверх к зеркалу  $M_2$  и затем тоже проходит к экрану. На экране лучи встречаются и интерферируют. Некоторым точкам соответствует разность хода в целое число волн (там поля складываются), а некоторым – полуцелое (поля вычитаются). На экране получается «забор» из светлых

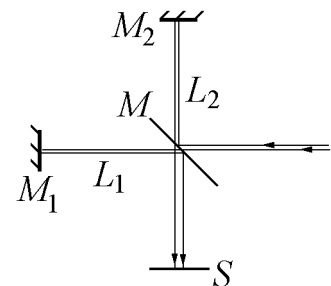


Рис. 4.4.

и темных полос.

Пусть прибор вместе с Землей летит относительно эфира горизонтально со скоростью  $V$ . Тогда время прохода горизонтальной петли  $M - M_1$  равно  $t_1 = L_1/(c + V) + L_1/(c - V) = (2L_1/c)/(1 - V^2/c^2)$ . При  $V \ll c$  получим  $(2L_1/c) \cdot (1 + V^2/c^2)$ . Время для вертикальной петли  $M - M_2$  будет  $2L_2/\sqrt{c^2 - V^2} = (2L_2/c)/\sqrt{1 - V^2/c^2} \approx (2L_2/c) \cdot (1 + V^2/2c^2)$ . Разность времен, определяющая фазу интерференции, содержит большое постоянное слагаемое, которое несущественно, а от скорости зависит как

$$\Delta t_x = \frac{V^2}{c^2} \cdot \left( \frac{2L_1 - L_2}{c} \right), \quad \Delta x = c\Delta t_x = \frac{V^2}{c^2} \cdot (2L_1 - L_2).$$

Эти величины очень малы, но при интерференции время  $\Delta t$  надо сравнивать с периодом волны, а оптическую разность хода  $\Delta$  — с длиной волны.

Заметим, что если прибор движется поперек исходного луча, надо будет перенести коэффициент 2 в последних формулах:

$$\Delta t_y = \frac{V^2}{c^2} \cdot \left( \frac{L_1 - 2L_2}{c} \right), \quad \Delta_y = \frac{V^2}{c^2} \cdot (L_1 - 2L_2).$$

Разность хода станет другой. Изменение это равно

$$\Delta_x - \Delta_y = \frac{V^2}{c^2} \cdot (L_1 + L_2).$$

Если взять  $V = 30$  км/с (скорость движения Земли по орбите), то  $V^2/c^2 = 10^{-8}$  и получится разность хода  $\lambda/2 \simeq 2.5 \cdot 10^{-5}$  см при  $L_1 + L_2 \approx 25$  м. Где было темно, станет светло (интерференционные полосы сдвинутся). Прибор располагался на каменной плите, которая плавала в баке со ртутью, а измерения проводили при непрерывном медленном вращении плиты. Необходимая длина плеч интерферометра набиралась с помощью ряда дополнительных зеркал. Заметного эффекта от поворота не получилось — полосы не двигались. Не было результата и через три месяца, когда Земля изменила направление движения по орбите на  $90^\circ$ . Таким образом, идея эфира тоже провалилась. Стали рассуждать об увлечении эфира Землей, но и из этого тоже ничего не вышло. По нынешним представлениям, поля «живут» без всякой среды, просто в вакууме, и им никакой эфир не нужен, другими словами, его попросту нет.

Но как быть со сложением скоростей? Разве не надо складывать встречные скорости, отнимать «догоняющие» и компенсировать «снос» при движении поперек? И если нет среды для электромагнитных волн, то относительно чего они имеют скорость  $c$ ? Недостаточно отказаться от эфира, а надо иметь что-то взамен. Мы увидим, что теория относительности вполне согласуется с экспериментом и решает все вопросы такого рода. В частности, толкование опыта Майкельсона приведено в п. 4.3.

Если все передается через какие-то поля, должна существовать **предельная скорость** распространения взаимодействий (или сигналов). Важно, что эта скорость, если она вообще существует, **одинакова** во всех системах отсчета (в силу принципа относительности). Естественный выбор в пользу ограниченной предельной скорости приводит,

как видим, к неожиданному результату – **инвариантности** этой скорости, что противоречит преобразованиям Галилея и известному нам закону сложения скоростей.

Принцип относительности Эйнштейна утверждает, что все природные явления (не только механические) протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Закипание чайника, игра в домино, прием пищи в каюте корабля приведут к таким же результатам, как на суше (если система корабля инерциальна – нет, например, качки). В частности, во всех системах одинакова предельная скорость распространения взаимодействий. С точностью современного эксперимента, с предельной скоростью распространяются электромагнитные волны, отчего короче ее называют скоростью света.

Важное и заранее не очевидное следствие инвариантности скорости света – **относительность одновременности** событий, происходящих в разных точках пространства. Скажем, мы на корабле решили синхронизовать часы на носу и корме. Став посредине, посылаем лучи света к часам. Свет идет одинаковое время, и увидев вспышку, ассистенты устанавливают часы на 0 одновременно. Этот способ синхронизации (указанный Эйнштейном) выглядит вполне разумным и естественным.

Если же на этот процесс смотреть из лабораторной системы, то передние часы убегают от луча света, а задние едут навстречу ему. Свет же имеет, как мы приняли, следуя экспериментальным данным и принципу Эйнштейна, всегда одну и ту же скорость. Явно передние часы будут отставать после такой синхронизации. События пуска часов в лабораторной системе не одновременны. Более того, при наблюдении из лабораторной системы все часы на корабле показывают разное время, именно благодаря усилиям команды по их синхронизации. Наоборот, команда видит свои часы установленными правильно, а береговые рассогласованными. Более подробно относительность одновременности рассматривается ниже, в п. 4.3.

Если принцип Галилея «произошел» из механики, то основа принципа Эйнштейна – электродинамика, более фундаментальная область знаний. Имеющаяся в электродинамике предельная скорость распространена на все явления природы. Значит, принцип относительности Эйнштейна не опровергает принцип Галилея, а наоборот, расширяет его. Теории относительности противоречит не принцип, а преобразования Галилея.

## 4.2 Преобразования Лоренца

Получим правильные преобразования. Довольно общий вид перехода от лабораторной системы  $K$  (событие  $x, t$ ) к системе  $K'$  ( $x', t'$ ):

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt), \\ t' = \delta t - \varepsilon x. \end{cases}$$

Здесь использовано требование однородности пространства и времени – это проявилось в линейности преобразований – и соответствие начала координат  $x' = 0$  точке  $x = Vt$ .

Коэффициенты  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$  не зависят от  $x, t$  (но могут зависеть от  $V$ ) и пока неизвестны. ПГ – частный случай, в них  $\gamma = \delta = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ . Непривычный вариант  $\varepsilon \neq 0$  необходим, иначе одновременность событий будет абсолютной; остальные нововведения ( $\gamma, \delta \neq 1$ ), как мы увидим, также понадобятся.

Рассмотрим начало координат системы К ( $x = 0$ ). В системе К' эта точка движется: для нее  $x' = -\gamma Vt$ ,  $t' = \delta t$ . Скорость движения  $x'/t' = -V\gamma/\delta$ . Если мы хотим равноправия систем отсчета, эта скорость должна быть  $-V$ , откуда  $\delta = \gamma$ . Остается два неизвестных коэффициента:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt), \\ t' = \gamma t - \varepsilon x. \end{cases}$$

Из электродинамики и эксперимента известно, что скорость  $c$  не зависит от системы отсчета. Пусть фронт световой волны движется по закону  $x = ct$  в системе К. Получаем

$$x' = \gamma(c - V)t, \quad t' = (\gamma - \varepsilon c)t, \quad x'/t' = \gamma(c - V)/(\gamma - \varepsilon c) \equiv c.$$

Из последнего равенства выражаем  $\varepsilon = \gamma V/c^2$ . Снова упрощаем:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt), \\ t' = \gamma(t - Vx/c^2). \end{cases}$$

Найдем обратные преобразования:  $x, t(x', t')$ . Решая два уравнения, получим

$$\begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\gamma(1 - V^2/c^2)}, \\ t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\gamma(1 - V^2/c^2)}. \end{cases}$$

В силу равноправия систем прямые и обратные преобразования должны иметь одинаковый вид. Для этого должно выполняться равенство  $\gamma(1 - V^2/c^2) = \gamma^{-1}$ , или  $1 - V^2/c^2 = 1/\gamma^2$ . Окончательно имеем **преобразования Лоренца**:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt), \\ t' = \gamma(t - Vx/c^2); \end{cases} \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + Vt'), \\ t = \gamma(t' + Vx'/c^2). \end{cases} \quad (4.1)$$

Прямые и обратные преобразования отличаются только знаком  $V$ . Множитель, или фактор,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$  всегда больше 1. При бытовых условиях, например для скорости Земли по орбите 30 км/с, под корнем стоит  $1 - 10^{-8}$ ,  $\gamma = 1,000000005$ . Это число отличается от 1 на границе точности ваших калькуляторов. Поэтому мы не замечаем неправильности ПГ. При больших же скоростях ( $V \approx c$ )  $\gamma \gg 1$ . Для полноты добавим еще два преобразования:

$$y = y', \quad z = z',$$

то есть координаты, поперечные к скорости системы  $V$ , не меняются.



### 4.3 Относительность одновременности. Сокращение масштаба и замедление времени

Сплюснутые звездолеты и нетронутые временем космонавты – наиболее известные эффекты теории относительности. Но самое поразительное следствие преобразований Лоренца – это уже упомянутая в п. 4.1 модификация понятия одновременности, которую теперь легко рассмотреть количественно. Пусть в системе  $K$  в разных местах, но одновременно происходит несколько событий. Момент этот примем за начальный,  $t = 0$ . Преобразуем событие  $(x, 0) \Rightarrow (x', t')$ :  $(x' = \gamma x, t' = -\gamma Vx/c^2)$ . Уже и по Галилею  $x'$  отличалось от  $x$ . Новое в том, что  $t'$  зависит от положения события. С корабля эти события не одновременны. Те, которые впереди, произойдут в движущейся системе раньше. Аналогично можно получить, что очередность удаленных событий может смениться при переходе в другую систему отсчета.

Это не иллюзия, связанная с распространением и запаздыванием сигналов: мы можем наблюдать события с большого поперечного расстояния  $y \gg x$ . Тогда пути света к наблюдателю будут практически параллельны и одинаковы. Или можно расставить много наблюдателей на длинном корабле, а потом они обменяются впечатлениями. Когда говорят «движущийся наблюдатель видит то-то», всегда следует понимать такую процедуру. В буквальном же смысле это будет неверно: близкого к оси  $x$  наблюдателя действительно может сбить с толку запаздывание света, и раньше всего он увидит ближайшее событие при  $x = 0$ .

Пусть на разных планетах одновременно решено провести дефолт<sup>1</sup>. Для движущегося наблюдателя эти события не одновременны. Может ли он, узнав о более раннем событии, использовать эту экономическую информацию? Пусть космонавт – разведчик наблюдает событие ( $t = 0, x > 0$ ), например в системе Альдебарана; для него крах случится в момент  $t' = -\gamma Vx/c^2$ . На Земле, при  $x = 0$ , реформа произойдет позже, при  $t = t' = 0$ . Казалось бы, есть еще некоторое время, чтобы связаться со своим партнером на Земле и посоветовать ему скупать (либо продавать) все подряд. Но чтобы попасть на Землю хотя бы в момент «Ч», пройдя расстояние  $x' = \gamma x$ , телеграмма должна идти со скоростью  $x'/|t'| = c^2/V > c$ , что невозможно. Информация придет слишком поздно – уже при  $t' > 0$ . Тот же сигнал в системе Земли послан в момент  $t = 0$ , и опоздание его становится очевидным.

Возьмем стержень, покоящийся в системе  $K'$  и имеющий в ней длину  $L_0$  (так называемую собственную длину, которую мы обычно и меряем). Координата левого конца  $x'_1 = 0$ , правого  $x'_2 = L_0$ . Как выглядит этот стержень из лабораторной системы  $K$ ? Из преобразований Лоренца  $x' = \gamma(x - Vt)$ . Надо брать координаты  $x$  в один момент лабораторного же времени  $t$ , проще всего в нулевой. Получаем  $L = x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)/\gamma = L_0/\gamma$ . Размер стержня сокращается в  $\gamma$  раз. Этот эффект называют **лоренцевым сокраще-**

<sup>1</sup>В прошлом веке примером служило повышение цен.

нием, или **сокращением Лоренца – Фицджеральда**.

Может показаться, что более прямой путь – взять формулу обратного преобразования  $x = \gamma(x' + Vt')$ . Если в ней считать  $t' = 0$ , получим, наоборот, удлинение. Но здесь не учтена относительность одновременности. Неправильно брать события, одновременные на корабле. Тогда в лабораторной системе левый конец отметится при  $t = 0$ , а правый – при  $t_{\Pi} = \gamma VL_0/c^2$ . Естественно, за это время правый конец проедет  $Vt_{\Pi}$  лишнего, и правильная длина стержня будет  $\gamma L_0 - Vt_{\Pi} = \gamma L_0(1 - V^2/c^2) = L_0/\gamma$ .

Аналогично стержень, покоящийся в лабораторной системе отсчета, сокращается для движущегося наблюдателя. Поэтому принцип относительности не нарушается – все изменения симметричны.

Рассмотрим часы, установленные на корабле при  $x' = 0$  и в начальный момент  $t = 0$  синхронизованные с неподвижными часами. Когда-то они проедут мимо других неподвижных часов, показывающих время  $t$ . Мы уже чувствуем, что движущиеся часы покажут другое. Пишем  $t = \gamma(t' + Vx'/c^2) = \gamma t'$ , так как  $x' = 0$ . Время  $t'$ , прошедшее по движущимся часам, меньше в  $\gamma$  раз (**эйнштейновское замедление времени**).

Возникает кажущееся неравноправие систем отсчета. Если летящие часы покажут меньше, вроде бы можно определить, какая система движется. Однако посмотрим на окрестность  $x = 0$ . Там стоят неподвижные часы, показывающие  $t$ , и пролетают мимо подвижные (их, наверно, много на корабле). Показания подвижных часов

$$t' = \gamma(t - V \cdot 0) = \gamma t,$$

наоборот, больше. Получается вполне симметричная картина. Сидя в любом начале координат, увидим, что пролетающие мимо часы показывают в  $\gamma$  раз больше, чем наши собственные. Опять проявляется относительность одновременности. Систему отсчета надо представлять как размеченные оси координат, на оси  $x$  густо наставлены синхронизированные между собой часы. Синхронизировать их можно хотя бы по телефону, учитывая запаздывание сигнала, либо удалившись далеко по оси  $y$ . В другой системе проделываются такие же манипуляции. Мы можем еще синхронизовать пару часов в разных системах. Обычный выбор в преобразованиях Лоренца – устанавливаются на 0 часы в началах координат. Но после этого другие пары часов в разных системах почти всегда не будут синхронизованы.

Проследим из лабораторной системы за теми часами корабля, которые в момент  $t_0$  как раз подойдут вровень к лабораторным часам в начале координат. Сколько показывали те же корабельные часы при  $t = 0$ ? Находились они при  $x = -Vt_0$ . Тогда

$$t'_{\text{нач}} = \gamma(0 - V(-Vt_0)/c^2) = \gamma V^2 t_0 / c^2.$$

Для лабораторной системы эти часы сильно убежали вперед. На сколько изменятся их показания через лабораторное время  $t_0$ ? Часы как раз подойдут к лабораторному началу координат, и покажут

$$t'_{\text{кон}} = \gamma(t_0 - V \cdot 0/c^2) = \gamma t_0.$$

Мы уже получали, что при встрече корабельные часы покажут в  $\gamma$  раз больше, чем показания  $t_0$  лабораторных в начале координат. Но изменение их показаний  $t'_{\text{кон}} - t'_{\text{нач}} = \gamma t_0(1 - V^2/c^2) = t_0/\gamma$ : такое же, как у корабельных часов, находившихся при  $t = 0$  в начале координат. Приведем пример при  $t_0 = 1, V/c = 0,8 \Leftrightarrow \gamma = 5/3$  (рис. 4.5): Разница показаний двух верхних (корабельных) часов как была  $16/15$ , такой и осталась.

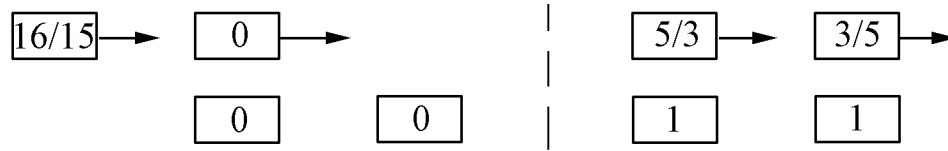


Рис. 4.5.

Увеличились же показания часов на одинаковое время  $3/5$ . Под этим и понимается замедление времени в движущейся системе отсчета в  $\gamma$  раз.

Мы видим, что ряд величин и соотношений, которые ранее считались абсолютными, переходят в разряд относительных. Соответственно теорию явлений, происходящих при больших скоростях, называют теорией относительности (англ. relativity theory, нем. Relativitätstheorie); скорости, сравнимые со скоростью света  $c$ , и характерные для таких скоростей эффекты называют релятивистскими.

Иногда лоренцево сокращение и эйнштейновское замедление называют кажущимися. Мол, на самом деле у стержня длина  $L_0$ . Но сокращение происходит именно на самом деле. Например, если надо пропустить летящий стержень через отверстие в стене, надо открыть заслонку на время  $L_0/(\gamma V)$ . Тот же стержень можно поймать в футляр меньшей, чем  $L_0$ , длины. Короткоживущие частицы, получающиеся в физике высоких энергий, пролетают гораздо большие расстояния, чем им положено по времени жизни. Ежедневно теория относительности проверяется на ускорителях в миллионах событий.

Теперь мы можем понять причину отрицательного результата опыта Майкельсона. В разделе 4.1 мы находили воздействие «эфирного ветра» на плечи интерферометра. Для параллельного скорости плеча время прохода равно

$$\frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - V^2/c^2} = \frac{2L}{c} \cdot \gamma^2,$$

а для перпендикулярного

$$\frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2L}{c} \cdot \gamma.$$

Вся проблема в том, что движение по-разному удлиняет время по сравнению с простым  $2L/c$ . Фицджеральд в 1889 г. указал, что если бы параллельное плечо сокращалось при движении в  $\gamma$  раз, несимметрия исчезла бы. Как мы видели, такое сокращение действительно происходит. Лоренц и позднее Пуанкаре вывели из электродинамики преобразования, названные именем Лоренца, из которых это сокращение следует. Эйнштейн независимо получил те же преобразования и верно их истолковал – как следствие относительности. В частности, он интерпретировал преобразование времени – не как формально удобное «местное» время, а как самое

настоящее время, которое будут показывать часы в движущейся системе. Отметим, что время прохода и параллельного, и перпендикулярного плеча в данном примере в  $\gamma$  раз больше времени  $2L/c$ , которое получилось бы при неподвижном приборе (и которое измерит движущийся вместе с прибором наблюдатель). Это – следствие не изменения скорости света, а эйнштейновского замедления времени. По принципу относительности, такое же время получилось бы при любом повороте «световых часов» (и по любым часам вообще).

Наконец, рассеем мнение, что у Эйнштейна все относительно. Например, скорость света абсолютна – не зависит от системы отсчета. Другой пример – **интервал** между событиями. По определению, квадратом интервала называется величина

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2,$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta t$  разделяют события в пространстве и во времени. Пусть у первого события  $x = t = 0$ , второе задано как  $(x, t)$ . В системе, движущейся со скоростью  $V$ ,

$$s'^2 = c^2 t'^2 - x'^2 = \gamma^2 (c^2 (t - Vx/c^2)^2 - (x - Vt)^2) = c^2 t^2 - x^2 = s^2,$$

что проверяется прямым вычислением. Такое свойство называют **инвариантностью**.

Например, если в одной системе отсчета квадрат интервала положителен, он положителен во всех системах. Тогда существует система, в которой  $\Delta x = 0$  и события происходят в одной точке. Только при  $s^2 > 0$  (**времениподобный** интервал) события могут быть причинно связанными. Если же  $s^2 < 0$  (**пространственноподобный** интервал), то есть система отсчета, в которой события происходят в один момент в разных точках. При нулевом интервале события связаны лучом света.

Интервал смешивает время и пространство. Минковский предложил считать  $ct$  четвертой (либо нулевой) координатой наравне с  $x, y$  и  $z$ . Тогда интервал будет аналогом квадрата такого четырехмерного вектора (у нас – двумерного), только квадраты времени и координат имеют разные знаки. Вспомним, что квадрат вектора или скалярное произведение векторов в обычном пространстве не меняются при вращениях, хотя все отдельные компоненты изменяются. Преобразование Лоренца в мире Минковского будет аналогом вращения. Интервал можно понимать как расстояние между событиями в четырехмерном пространстве.

Релятивистские парадоксы многим не нравятся. Однако в галилеевской картине мира тоже есть свои неудобства. Вспомним последствия баллистической гипотезы из предыдущего раздела. Теория относительности объясняет все известные эффекты, причем довольно просто, если к ней привыкнуть.

Основная трудность в теории относительности – осознание важности понятия события. От рождения у нас, вероятно, аристотелевское мышление. Как когда-то оппоненты Галилея, мы в детстве думаем, что движущаяся Земля убежала бы из-под ног, что камень, сброшенный с мачты корабля, отстанет от его хода, а также испытываем дискомфорт, видя из окна поезда отъезжающий вокзал. Нужны обучение и практика, чтобы усвоить галилеевскую относительность. Но у Галилея событие не является центральным понятием, и именно из-за инвариантности времени. Преобразования Галилея

преобразуют только координаты; время же еще абсолютно. Теперь известно, что вера в абсолютное время – это тоже пережиток прошлого, но более живучий из-за слабости нарушения одновременности в нашем мире малых скоростей и плохой вообще наглядности времени. Момент времени и место пространства образуют событие. Вот событие – это и есть элемент реальности. Что произошло в одной системе, произошло и в другой<sup>2</sup>, и преобразования Лоренца говорят нам, где и когда. Дополнительный материал о релятивистских парадоксах изложен в приложении к данной главе.

## 4.4 Сохранение энергии-импульса

Сначала выясним, как складываются скорости. На корабле пусть движется матрос со скоростью  $u'$ , то есть  $x' = u't'$ . В лабораторной системе  $x = \gamma(x' + Vt')$ ,  $t = \gamma(t' + Vx'/c^2)$ . Получим лабораторную скорость матроса

$$u = \frac{x}{t} = \frac{u' + V}{1 + u'V/c^2}. \quad (4.2)$$

Это выражение от галилеевского отличается только знаменателем. При малых скоростях знаменатель почти равен 1. Но легко показать, что если складывать  $c$  и любую скорость, получится  $c$ ; при сложении двух скоростей, меньших  $c$ , результат всегда меньше  $c$ .

Скорость преобразуется не по Галилею (что не удивительно), но даже, в отличие от координат, явно не по Лоренцу. Желательно найти связанную со скоростью величину с хорошим законом преобразования. Попробуем вычислить  $\gamma(u) = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ . Этот множитель пригодится хотя бы для перехода из лабораторной системы в систему идущего по кораблю матроса. На первый взгляд эта величина, выраженная через  $V$  и  $u'$  согласно (4.2), будет очень сложной и громоздкой. Однако, если ее честно упростить, выходит не так уж длинно:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1 + u'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}\sqrt{1 - u'^2/c^2}}. \quad (4.3)$$

Теперь умножим это на  $u$ ; тогда пропадет нехороший множитель  $1 + u'V/c^2$  и останутся только сумма скоростей и уже привычные гаммы:

$$\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{u' + V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}\sqrt{1 - u'^2/c^2}}. \quad (4.4)$$

С такой скоростью может двигаться какая-то частица. Умножим на ее массу  $m$ :

$$\frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{mu' + (V/c) \cdot mc}{\sqrt{1 - V^2/c^2}\sqrt{1 - u'^2/c^2}}.$$

---

<sup>2</sup>В общей теории относительности бывает еще интереснее. Например, при путешествии в черную дыру космонавт упадет туда за довольно недолгое время по своим часам, а для удаленного наблюдателя время падения будет бесконечным. Это крайний предел относительности времени – событие, происшедшее в одной (уже неинерциальной) системе отсчета, не происходит в другой.

Это уже недалеко от преобразований Лоренца. Чтобы лучше их разглядеть, запишем координатно-временные преобразования, введя вместо времени  $t$  «нулевую» координату  $x_0 = ct$ , имеющую одинаковую размерность с обычной координатой  $x$ , которая считается первой ( $x_1$ ;  $y$  и  $z$  – вторая и третья координаты  $x_{2,3}$ ).

$$x = \gamma(x' + (V/c)ct'), \quad ct = \gamma(ct' + (V/c)x').$$

Формулы стали симметричнее по сравнению с (4.1): входит только  $\gamma$  и безразмерный коэффициент  $V/c$  (часто обозначаемый  $\beta$ ). Во избежание путаницы здесь и далее под  $\gamma$  понимается  $1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ , то есть величина, вычисленная по фиксированной скорости системы отсчета. Обозначаем

$$\begin{aligned} \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} &= p_1, & \frac{mu'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} &= p'_1, \\ \frac{mc}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} &= p_0, & \frac{mc}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} &= p'_0, \end{aligned}$$

Тогда вместо (4.3,4.4) получим пару преобразований

$$p_1 = \gamma(p'_1 + (V/c)p'_0), \quad p_0 = \gamma(p'_0 + (V/c)p'_1).$$

Это – преобразования Лоренца; остается установить смысл величин  $p_1$  и  $p_0$ . Для этого используем соответствия в нерелятивистском пределе. При малых скоростях  $\sqrt{1 - u^2/c^2}$  в знаменателе  $p_1$  стремится к 1, и  $p_1$  переходит попросту в нерелятивистский импульс  $p_x = mu$ . Разумно принять, что правильным выражением релятивистского импульса будет

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \text{а в векторном виде} \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (4.5)$$

Чтобы разобраться с нулевой компонентой  $p_0$ , умножим ее на  $c$ :

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = mc^2 \cdot (1 - u^2/c^2)^{-1/2} \approx mc^2 \cdot \left(1 - \frac{u^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{mu^2}{2}.$$

Приближенное равенство годится при малых скоростях (бином Ньютона). Видим большую постоянную величину с добавкой  $mu^2/2$  – нерелятивистской кинетической энергии. Эйнштейну потребовалась определенная смелость, чтобы провозгласить, что  $cp_0$  есть релятивистское выражение энергии:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (4.6)$$

Тогда получается, что даже при нулевой скорости любое тело имеет **энергию покоя**:

$$E = mc^2. \quad (4.7)$$

Эта формула (Эйнштейн, 1905) относится к числу самых популярных и красуется на сникерах, вывесках фитнес-заведений и пр. Энергия покоя макроскопических тел огромна, так как (по нашим масштабам) скорость света велика. Например, все атомные электростанции страны вырабатывают в год порядка  $10^{18}$  Дж, что соответствует 10 кг массы. Если научиться массу переводить в энергию полностью, выйдет большая экономия. Реально перегружается порядка 1000 т/год ядерного топлива из-за сильного разбавления, неполного выгорания, скромного теплового КПД и, главное, неполной эффективности ядерной реакции: используется около 0,1% массы распавшегося ядра  $^{235}\text{U}$ . Все же это гораздо меньше, чем потребовалось бы угля ( $\sim 10^8$  т/год).

Что мы выиграли, изменив выражения для энергии и импульса? Они теперь гораздо сложнее зависят от скорости, но, правда, проще стали преобразования к другой системе отсчета. Может быть, лучше пользоваться старыми, нерелятивистскими выражениями?

Основная польза от энергии и импульса – в законах их сохранения. В то же время в теории относительности шагу не ступить без перехода между системами отсчета. Вряд ли будет смысл в законе сохранения, если он выполняется только в одной системе отсчета. По принципу относительности, если уж импульс сохраняется, то сохраняется в любой системе. Иначе в понятии импульса не будет ни смысла, ни интереса.

Именно такой плохой величиной будет нерелятивистский импульс  $mu$ . Рассмотрим простую задачу – неупругое столкновение одинаковых тел. В «штрихованной» системе их скорости возьмем противоположными, и нерелятивистский импульс сохраняется:

$$(\text{до удара}) \quad m \cdot u' + m \cdot (-u') = 2m \cdot 0 \quad (\text{после}).$$

Нулевая скорость после слипания получается из симметрии. В лабораторной же системе, в которой одно из тел до удара покоится, получившееся тело имеет скорость  $u'$ , а ударник налетает с релятивистской суммарной скоростью  $u = (u' + u')/(1 + u'^2/c^2)$ . Равенства не получается:

$$(\text{до удара}) \quad 2m \cdot u'/(1 + u'^2/c^2) \neq 2m \cdot u' \quad (\text{после}).$$

Можно только предположить, что почему-то масса выйдет не  $2m$ , а как раз такая, чтобы получилось равенство. Но если рассмотреть процесс из системы с произвольной скоростью  $V$ , то масса уже будет зависеть от скорости  $V$  (явно, а не через изменившуюся скорость  $u'$ ). Проку из этого не выйдет никакого. По принципу относительности, измеряя массу, нельзя найти скорость вашей системы. Математически корень зла в том, что преобразование скорости сложное (нелинейное).

Наоборот, релятивистские выражения импульса и энергии преобразуются по Лоренцу – линейно. Если были какие-то импульсы и энергии до взаимодействия и сумма по всем частицам после взаимодействия такая же, то преобразование к любой системе не нарушит равенства. Для рассмотренного примера в движущейся системе отсчета

$$\frac{mu'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} + \frac{m(-u')}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = 0,$$



$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = Mc^2.$$

Из второго уравнения – закона сохранения энергии – видим, что масса получившегося покоящегося тела больше, чем  $2m$ : кинетическая энергия при ударе перешла в массу.

В системе покоя одного из тел до удара у этого тела скорость 0, у налетающего  $u = 2u'/(1+u'^2/c^2)$ , импульсы до удара 0 и  $mu/\sqrt{1-u^2/c^2}$ , что дает  $2mu'/(1-u'^2/c^2)$  (получается прямым вычислением). После удара скорость  $u'$ , масса  $M = 2m/\sqrt{1-u'^2/c^2}$ , импульс  $Mu'/\sqrt{1-u'^2/c^2}$  такой же, как до удара. Точно так же энергия сохраняется независимо от системы отсчета. Мы получили это максимально «тупым» образом через преобразования скоростей; через преобразования Лоренца для импульса и энергии то же получится автоматически при любой скорости системы. Линейные преобразования не могут нарушить равенства двух сумм.

В действительности при больших скоростях сама скорость – нехарактерная величина, а более удобны как раз энергия и импульс. Аналогично интервалу, легко ввести инвариантную величину: вместо  $c^2t^2 - x^2$  пишем  $E^2/c^2 - p^2$ . Раз это вещь инвариантная, ее можно найти в системе покоя частицы, где она равна  $m^2c^2$ . Или можно то же получить прямым вычислением из выражений  $E$  и  $p$  через скорость. Отсюда имеем явную связь энергии частицы с импульсом:

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}.$$

Это выражение заменяет параметрическую зависимость  $p(u)$ ,  $E(u)$ .

Из последней формулы видна возможность существования безмассовых частиц, обладающих, однако, энергией и импульсом. При  $m = 0$  будет  $E = cp$ . Скорость при этом, очевидно, равна  $c$ . По имеющимся сведениям, такими частицами являются фотоны. Вместо скорости характерной кинетической величиной у них будет частота  $\omega$  или длина волны  $\lambda$ :  $E = \hbar\omega$ ,  $p = \hbar k = 2\pi\hbar/\lambda$ . Здесь  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$  эрг·с – постоянная Планка<sup>3</sup>.

Вернемся к рассмотрению неупругого соударения двух частиц в более реальной постановке. Пусть соударяются электрон и позитрон с противоположными импульсами. При достаточной энергии  $E$  частиц в результате может получиться пара протон + антипротон. Для этого нужно как минимум  $2E = 2Mc^2$ , если родившиеся частицы покоятся.  $M$  – это масса протона, превышающая массу электрона  $m$  в  $\approx 1840$  раз. Такая постановка описывает опыт на встречных пучках. Скорость частиц  $V$ , следовательно, такова, что  $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2/c^2} \geq M/m$ .

Если же разгонять позитрон, а затем ударить им по покоящемуся в мишени электрону, потребуется энергия позитрона, которую можно найти из преобразования Лоренца:  $E_1 = \gamma(E + Vp) \approx \gamma(E + VE/c) \approx 2\gamma E = (2M/m) \cdot Mc^2$ . Видна выгода метода встречных пучков: для того же эффекта нужна в тысячи раз меньшая энергия пучка.

<sup>3</sup>Разумеется, выражения, содержащие  $\hbar$ , никак не следуют из уже рассмотренного материала; мы получим их обоснование в следующих разделах.



Релятивистские зависимости импульса и энергии от скорости в популярной литературе обычно объясняют как увеличение массы:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

При этом  $m_0$  называют массой покоя. Переопределение массы приносит некоторые частные удобства. Например, полная энергия через «увеличенную» массу выражается так же, как энергия покоя:  $mc^2$ , а импульс будет  $m\mathbf{u}$ . Сейчас такой подход признается устаревшим (хотя по традиции еще может использоваться в технике). В физике «массу покоя» называют просто массой и обозначают  $m$ . Импульс тогда равен  $m\mathbf{u}/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ , энергия  $mc^2/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ . До некоторой степени дело вкуса, что считать массой. Но мы увидим, что в динамике переменная масса неудобна. Вообще полезнее найти что-то постоянное («физическая» масса является лоренц-инвариантом), нежели меняющееся.

В теории относительности импульс и энергия – не независимые величины, как в нерелятивистской механике, а взаимосвязанные. Они преобразуются по Лоренцу друг через друга при переходе в другую систему. То же относится ко времени и координатам события. Для компактного представления таких величин вводится понятие **четырёх-вектора**, т.е. вектора в четырёхмерном пространстве. В частности, событие  $(t, x, y, z)$  описывается четырёхвектором события  $x_i$ ,  $i = 0..3$ :

$$x_i : (x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z) \quad \text{или} \quad x_i = (ct, \mathbf{r}). \quad (4.8)$$

Аналогично энергия и три компоненты импульса есть компоненты четырёхмерного вектора энергии-импульса (кратко – четырёхимпульса или 4-импульса):

$$p_i : (p_0 = E/c, p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z) \quad \text{или} \quad p_i = (E/c, \mathbf{p}). \quad (4.9)$$

Правильное уравнение, каковым является закон сохранения, связывает значения четырёхимпульса до и после взаимодействия.

## 4.5 Релятивистская динамика

Нам надо получить аналог второго закона Ньютона, правильный при любых скоростях. Пусть скорость частицы  $u$  сравнима с  $c$ , тогда выберем такую систему отсчета, в которой частица почти покоится или хотя бы движется нерелятивистски. Скорость такой почти сопутствующей системы  $V$  близка к  $u$ , но в отличие от  $u$  строго постоянна (для инерциальности).

В движущейся системе можно описать движение точно. Если на частицу действует продольная сила  $F'$ , то ее скорость  $u' = F't'/m$ . Переходим в лабораторную систему:

$$u = \frac{V + u'}{1 + u'V/c^2} = (V + u')(1 - u'V/c^2) = V + u'(1 - V^2/c^2).$$

Второе слагаемое – изменение лабораторной скорости  $\Delta u$  из-за действия силы. Так как  $u'$  зависит от  $t'$ , преобразуем еще время:

$$t = \gamma(t' + Vx'/c^2) = \gamma t',$$

поскольку  $x' = F't'^2/2m$  мало. Или можно сказать, что  $t'$  это сокращенное собственное время. Получаем

$$\Delta u = (F't'/m)(1 - V^2/c^2) = (F'/m) \cdot (1 - V^2/c^2)^{3/2} \cdot t.$$

Время  $t$  – это, собственно,  $\Delta t$ , так что

$$m \frac{\Delta u}{\Delta t} = F'(1 - V^2/c^2)^{3/2} \quad \text{или} \quad \frac{m \Delta u / \Delta t}{(1 - V^2/c^2)^{3/2}} = F'.$$

Вычислим производную

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = m \frac{du}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{mu^2}{c^2} \frac{du}{dt} \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} = m \frac{du}{dt} \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}}.$$

Вспоминаем, что система квазисопутствующая. Под корнем после дифференцирования можно считать  $u = V$ , и уравнение движения

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = F'. \quad (4.10)$$

Сила  $F'$ , например, может быть  $eE'$  – электрическая, вычисленная по полю в сопутствующей системе.

Теперь пусть действует поперечная сила, так что скорость по оси  $z$  равна  $w' = F't'/m$ . Смещение «поперек» не изменяется:

$$z = F't'^2/2m = (F'/2m) \cdot (1 - V^2/c^2) \cdot t^2.$$

Ускорение, перпендикулярное скорости, уменьшается в  $\gamma^2$  раз. То же самое можно написать так:

$$\frac{d}{dt} \frac{mw}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = F' \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Скорость  $\mathbf{u}$  – это векторная сумма  $\mathbf{i}V$  и  $\mathbf{k}w$ , взаимно перпендикулярных. Если появляется малая скорость  $w$ , на величине  $u$  это скажется во втором порядке – по теореме Пифагора. Поэтому опять можно поменять  $V$  на  $u$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{mw}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = F' \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (4.11)$$

В уравнениях движения (4.10, 4.11) в левой части под знаком производной стоит понятная величина – соответствующая компонента импульса. В правой части пока что

«не та» сила. Из лабораторной системы нужно посылать делегатов в сопутствующую, чтобы узнать  $F'$ . В (4.11) стоит  $F'$ , еще и деленная на  $\gamma$ . Как преобразуются силы?

Продольную силу получим, рассмотрев конденсатор, пластины которого перпендикулярны скорости  $V$ . По теореме Гаусса поток электрического поля  $ES$  равен  $4\pi Q$  в любой системе отсчета. Поперечные размеры не меняются,  $S$  то же самое. Отсюда получаем преобразование продольного поля:  $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$ .

Для преобразования поперечной силы берем неподвижный конденсатор, пластины которого параллельны скорости. В сопутствующей системе поток  $E'S'$ , а в лабораторной  $ES$ . Из-за лоренцева сокращения движущаяся площадь  $S'$  меньше в  $\gamma$  раз, так что  $E'_{\perp} = E_{\perp}/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ . В сопутствующей системе есть еще поле  $H$  от летящего конденсатора. Но оно не влияет на покоящуюся частицу. Теперь видно, что в обоих случаях в правой части уравнения движения стоит попросту компонента  $eE$ , или сила в лабораторной системе отсчета. Окончательно векторное уравнение движения выглядит так:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \frac{[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]}{c} \right).$$

Это уравнение годится при любых скоростях, хотя оно не имеет «четырехмерного» вида, так как в него входит несимметричная величина – время  $t$ . Одна из компонент четырехвектора события таким образом выделяется. Это отклонение компенсируется тем, что трехмерная сила тоже не составляет компонент четырехвектора. Мы не будем формулировать уравнение движения в четырехмерном, или **ковариантном**, виде, за недостатком времени, но это делается довольно просто.

Рассмотрим релятивистское движение в простейших случаях. В магнитном поле сила поперечна скорости. Поэтому величина скорости, как и в нерелятивистском случае, не меняется. Тогда

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = e \frac{[\mathbf{uH}]}{c},$$

и меняется только направление вектора  $\mathbf{u}$ . Верны те же нерелятивистские формулы, но с заменой массы на  $m/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ . Например, частота вращения  $\omega = (eH/mc)\sqrt{1 - u^2/c^2}$ , так что релятивистский циклотрон будет работать плохо. На практике пользуются не скоростью, а энергией частицы  $\mathcal{E}$ . Для ускорителей важен радиус обращения  $R = m\mathbf{u}c / (eH\sqrt{1 - u^2/c^2}) \approx \mathcal{E}/eH$ . При энергии 1 ГэВ, поле 1 кЭ радиус будет  $(10^9/300)/10^3 \approx 3000$  см или 30 м. Сейчас законсервировано строительство ускорителя в Техасе с окружностью 100 км.

В электрическом поле, параллельном движению, можно написать<sup>4</sup>

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = eE = \text{const}.$$

<sup>4</sup>Заметим, что сторонники школы увеличивающейся со скоростью массы здесь пишут, как правило, неверное уравнение  $(m/\sqrt{1 - u^2/c^2}) \cdot d\mathbf{u}/dt = eE$  по аналогии со вторым законом Ньютона. Корень нельзя выносить из-за знака производной.

Отсюда  $u/\sqrt{1 - u^2/c^2} = (eE/m) \cdot t$ . В скобках стоит ускорение в сопутствующей системе отсчета. Поэтому мы одновременно решаем задачу о полете космонавта к звездам с субъективно постоянным ускорением  $a' = eE/m$ , что, конечно, занимательнее.

Находим скорость:  $u/c = (a't/c)/\sqrt{1 + (a't/c)^2}$ . Разумеется, космонавту удобнее постоянное ускорение  $g = 10^3$  см/с, создающее в ракете земную тяжесть. Время будем мерять в годах ( $3 \cdot 10^7$  с). Тогда за 1 год  $a't \approx c$  и безразмерная скорость (в единицах  $c$ )

$$u = t/\sqrt{1 + t^2}.$$

Видно что скорость всегда меньше 1, но стремится к 1 (то есть скорости света) при больших  $t$  (должно пройти много лет). При малых  $t$  скорость пропорциональна времени – нерелятивистское поведение. Пройденное расстояние:  $dx/dt = u$ , откуда

$$x = \int \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} dt = \sqrt{1 + t^2} - 1.$$

При малых  $t$  получается  $t^2/2$  (в размерных единицах школьное выражение  $a't^2/2$ ), а при больших практически  $x = t - 1$ : движение почти со скоростью света. Напомним, что расстояние здесь выражено в световых годах, а в сантиметрах будет  $c(t - c/a')$ .

Найдем еще затраты собственного времени космонавта. Собственное время  $\tau$  меньше  $t$ :  $d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2} = dt/\sqrt{1 + t^2}$ . Такой интеграл берется:  $\tau = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$ . При малых временах (меньше года)  $\tau \approx t$ , но при больших очень слабо зависит от времени полета:  $\tau \approx \ln(2t)$ . Для наглядности нарисует таблицу:

|               |   |      |     |     |     |        |            |            |            |            |
|---------------|---|------|-----|-----|-----|--------|------------|------------|------------|------------|
| $t$ , лет     | 0 | 1,0  | 3,0 | 10  | 100 | $10^3$ | $10^4$     | $10^5$     | $10^6$     | $10^8$     |
| $x$ , св. лет | 0 | 0,41 | 2,2 | 9,1 | 99  | 999    | $10^4 - 1$ | $10^5 - 1$ | $10^6 - 1$ | $10^8 - 1$ |
| $\tau$ , лет  | 0 | 0,88 | 1,8 | 3,0 | 5,3 | 7,6    | 9,9        | 12,2       | 14,5       | 19,1       |

До ближайшей звезды около 4 св. лет, так что за 3 земных года полета пролетим половину расстояния. Затем надо тормозить; в результате туда и обратно затратится  $3 \cdot 4 = 12$  лет по земным часам и  $1,8 \cdot 4 = 7,2$  года по часам космонавта. Дальше релятивистские эффекты проявляются во всей красе. До центра галактики ( $10^4$  св. лет) лететь меньше 10 лет (значит, типичный полет по Галактике займет 40 лет). Однако на Земле пройдут все  $4 \cdot 10^4$  лет, за которые неизбежно сменится не одна цивилизация. Отсюда видна невозможность так называемых галактических империй. До границы наблюдаемой Вселенной лететь около  $2 \cdot 23 = 46$  лет; правда, туда и обратно будет уже 92 года. Вернувшись, такой путешественник застанет погасшее Солнце. Если слетать всего на  $10^8$  св. лет, то в лучшем случае на Земле обнаружатся существа столь же близкие космонавтам, как динозавры. Эти примеры показывают, что в полетах к звездам нет никакого смысла, не говоря об огромных затратах энергии. Лучше пользоваться телефоном. С другой стороны, нам нечего опасаться нашествия космических завоевателей.

Отметим, что логарифмическая зависимость собственного времени получена в предположении постоянного ускорения. Если разогнаться даже до большой скорости и затем выключить мотор, то после этого собственное время будет нарастать линейно, хотя и с малым коэффициентом.

В заключение рассмотрим последний релятивистский эффект. Вокруг провода с током есть магнитное поле  $H = 2I/cR$  и на движущийся со скоростью  $V$  заряд действует сила Лоренца. Например, если  $V$  направлена вдоль тока, положительный заряд притягивается к проводу с силой  $qVH/c^2 = 2qVI/c^2R$ . Притяжение должно наблюдаться и из сопутствующей системы. Но в ней нет силы Лоренца, так как скорость заряда нулевая. Что же притягивает?

В лабораторной системе провод не заряжен и электрического поля нет. Мы знаем, что при движении происходят искажения длин. Может, это как-то влияет?

Пусть в проводе двигались положительные заряды со скоростью  $u$ . Их плотность  $n_0$  такая же, как плотность неподвижного отрицательного фона; в результате провод нейтрален. Из системы, имеющей скорость  $V$ , наблюдается сокращенный провод с теми же поперечными размерами. Поэтому плотность отрицательного фона будет  $n'_- = n_0/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ , то есть увеличится. Сложнее найти плотность положительных зарядов. Их скорость  $u' = (u - V)/(1 - uV/c^2)$ . Раз плотность была  $n_0$  в системе, где заряды двигались, то «собственная» плотность в сопровождающей эти заряды системе была  $n_{+0} = n_0\sqrt{1 - u^2/c^2}$  — меньше, чем  $n_0$ . Теперь  $n'_+$  увеличится по сравнению с  $n_{+0}$  соответственно скорости  $u'$ :

$$n'_+ = \frac{n_{+0}}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = n_0\sqrt{1 - u^2/c^2} \frac{1 - uV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}\sqrt{1 - u^2/c^2}} = n_0 \frac{1 - uV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Видим, что сумма

$$n'_+ - n'_- = -\frac{n_0 u V / c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

не равна нулю. В движущейся системе провод заряжен отрицательно.

Заряд на единицу длины  $\lambda = eS(n' - n')$ , где  $S$  — сечение провода. Электрическое поле в движущейся системе

$$E' = \frac{2\lambda}{R} = -\frac{2Sen_0 u V / c^2}{R\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{2IV/c^2}{R\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

направлено к проводу. На положительный заряд будет действовать сила  $qE'$ . Поскольку магнитное поле в лабораторной системе  $H = 2I/cR$ , сила  $qE'$  отличается от лабораторной силы Лоренца только множителем  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ . Мы уже видели, что поперечная сила так и преобразуется.

Некоторые не верят, что движущийся провод заряжен. Пусть заряды поставляются из некоторого ящика в провод с одного конца и убираются в подобный же ящик на другом конце. В лабораторной системе провод нейтрален. Заряды ящиков меняются

со временем; для простоты пусть они противоположны:  $\pm It$ . В сумме имеем нуль. В движущейся системе провод заряжен. Как же быть с законом сохранения заряда?

Из движущейся системы не будут противоположны заряды ящиков, так как они будут наблюдаться одновременно в движущейся и неодновременно в лабораторной системе. Проверьте, что избыток как раз компенсируется зарядом провода, так что суммарный заряд нулевой.

Мы встречались с преобразованиями полей раньше (см. последний параграф электродинамики), но теперь, наконец, удалось их получить хотя и не в полном виде, но уже в релятивистском случае. Вообще электродинамика, когда с ней познакомишься, поражает тем, как в ней все аккуратно сходится.

## Приложение. Три парадокса

Этот добавочный раздел должен помочь разобраться в кинематике теории относительности. Не исключен, однако, и противоположный результат. Те, кто опасается, что окончательно запутаются, могут пропустить текст, напечатанный мелким шрифтом.

### Пенал и карандаш

Имеем неподвижные пенал и карандаш, причем карандаш как раз помещается в пенале. Разгоняем карандаш, он испытывает лоренцево сокращение. Можно впустить его в пенал с одной стороны, закрыть крышку, и некоторое время карандаш целиком будет внутри пенала.

Теперь разгоним пенал, чтобы он наехал на покоящийся карандаш. Пенал, наоборот, стал короче и явно не уместит в себе весь карандаш. Или, вместо разгона пенала, можно просто перейти в систему карандаша. Может ли результат измениться при переходе в систему отсчета?

Оказывается, вполне может. Нет такого события, как помещение целого карандаша в пенал, так как карандаш нельзя характеризовать единственной координатой: у него два конца. Событиями будут, например, влет в пенал переднего и заднего концов карандаша. В системе пенала длины  $L$  карандаш имеет длину  $L/\gamma$ . Пусть первое событие ( $x = 0, t = 0$ ) будет влет переднего конца в пенал. Влет заднего конца – второе событие ( $x = 0, t = L/\gamma V$ ). Вылет переднего конца из пенала: ( $x = L, t = L/V$ ). В системе карандаша первое событие запишем как ( $x' = 0, t' = 0$ ), второе будет ( $x' = -L, t' = L/V$ ), а третье ( $x' = 0, t' = \gamma(L/V - VL/c^2) = \gamma L/V(1 - V^2/c^2) = L/\gamma V$ ). В системе карандаша меняется последовательность событий: вылет переднего конца происходит раньше влета заднего. Это ясно и из формулировки, но теперь получилось из преобразований Лоренца. Если относительна одновременность, то и порядок событий во времени может меняться при переходе в другую систему отсчета.

### Видимая форма предметов

Пусть высоко над вами пролетают два звездолета пришельцев в форме куба и шара. Как они выглядят? Обычно отвечают, что предметы испытывают лоренцево сокращение и шар, например, выглядит эллипсоидом, сплюснутым в направлении движения. Это неверно.

Начнем с куба. Его нижняя грань действительно сокращена и видна как прямоугольник со сторонами 1 и  $1/\gamma$  (рис. 4.6). Но из-за движения фотоны, испущенные задней гранью куба

точно вниз, не будут задевать об эту грань и тоже попадут в глаз или объектив фотоаппарата.

Чтобы прийти одновременно с «нижними» лучами, верхние должны стартовать на  $1/c$  раньше, и задняя грань будет видна как прямоугольник со сторонами 1 и  $V/c$ . Если ввести угол  $\varphi$  такой, что  $\sin \varphi = V/c$ , то  $\cos \varphi = 1/\gamma$ , и куб выглядит не сжатым, а повернутым на угол  $\varphi$  (рис. 4.6). Точно так же повернутым, то есть не изменившимся, виден шар. Хотя **на самом деле** он сплюснен лоренцевым сокращением, из-за различного времени хода света он **кажется** круглым.

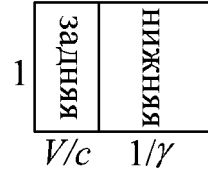


Рис. 4.6.

### Парадокс близнецов

Один из двух близнецов летит к звездам с хорошей скоростью, второй же для контроля остается на Земле. Для земного наблюдателя часы путешественника замедлены. В силу принципа относительности так же замедлены все процессы, иначе путешественник мог бы определить абсолютное движение. Вернется еще вполне бодрый космонавт и встретит дряхлого старика.

С точки зрения космонавта, замедлены часы его брата на Земле. Почему же, как мы знаем из фантастики, стареет все же неподвижный брат? Вот это и есть парадокс близнецов.

Обычно принято выдвигать объяснение, состоящее в неинерциальности системы отсчета космонавта. Ему надо вернуться, он испытывает ускорения. Поэтому системы неравноправны. Но некоторые начитанные могут вспомнить уже общую теорию относительности, в которой ускорения – самое обычное дело и вообще все системы равноправны. Желательно разобраться в парадоксе без таких непонятных отсылок, в рамках кинематики.

Нужны три системы отсчета: лабораторная  $K$ , летящая «туда»  $K'$  (скорость  $V$ ) и летящая обратно  $K''$  ( $-V$ ). Космонавт прыгает в трамвай, едет до нужной звезды, а там перескакивает во встречный. Момент старта примем за нуль во всех системах, и в месте старта в этот момент были все три начала координат.

Момент перескока в лабораторной системе  $t_1 = \tau$ , а положение станции  $x_1 = V\tau$ . Преобразуем к системе  $K'$ :

$$x'_1 = \gamma(x_1 - Vt_1) = 0, \quad t'_1 = \gamma(t_1 - Vx_1/c^2) = \gamma\tau(1 - V^2/c^2) = \tau/\gamma.$$

Как и положено, на трамвае координата 0, а времени до перескока пройдет  $\tau/\gamma$ . Теперь прыгаем:

$$x''_1 = \gamma(x_1 + Vt_1) = 2\gamma V\tau, \quad t''_1 = \gamma(t_1 + Vx_1/c^2) = \gamma\tau(1 + V^2/c^2).$$

Перед  $V$  знак плюс, так как едем обратно. Момент возврата  $t_2 = 2\tau$ ,  $x_2 = 0$ . Преобразуем его:

$$t''_2 = \gamma(t_2 + Vx_2/c^2) = 2\gamma\tau.$$

После пересадки пройдет  $t''_2 - t''_1 = \gamma\tau(2 - 1 - V^2/c^2) = \tau/\gamma$ . Действительно, на обоих трамваях набралось  $2\tau/\gamma$  – сокращенное время. На столько постареет космонавт. Где же равноправие?

Нет оснований ожидать равноправия лабораторной системы с комбинацией двух других. Посмотрим, что видно из ортодоксальной системы  $K'$ . Пассажиры, решившие не пересаживаться, дождутся конца путешествия своего товарища в момент  $t'_2 = \gamma(t_2 - Vx_2/c^2) = 2\gamma\tau$ . Это, наоборот, долго по сравнению с лабораторным временем  $2\tau$ . Точно то же полное время уже получилось в системе  $K''$ . Действительно, с точки зрения инерциальных подвижных



систем часы земного близнеца идут медленнее в  $\gamma$  раз. Это полностью симметрично с восприятием этих систем с Земли.

Впечатления путешествующего близнеца можно описать так. Пересев во встречный транспорт, он узнает от попутчиков, что двинулся в путь давным-давно:  $t_1'' = \gamma\tau(1 + V^2/c^2)$  тому назад. При большом  $\gamma$ , то есть  $V \approx c$ , это большое время. На часах же путешественника прошло всего  $\tau/\gamma$  – малое время. Если космонавт не поверит очевидцам, он может повторить эксперимент в качестве наблюдателя системы  $K''$  и убедиться в их правоте. Происходит потеря времени в момент пересадки.

В системе  $K''$  в момент пересадки  $t_1''$  найдется наблюдатель, как раз находящийся напротив часов земного близнеца. Согласно формуле пересчета  $t_1'' = \gamma(t_1 + V \cdot 0/c^2)$  он увидит на этих часах  $t_{\text{после}} = t_1''/\gamma = \tau(1 + V^2/c^2)$ . Точно так же, до пересадки в системе  $K'$  наблюдатель, летящий мимо часов земного близнеца, увидит на них  $t_{\text{до}} = t_1'/\gamma = \tau/\gamma^2$ . Изменение показаний одних и тех же земных часов при пересадке возникает из-за переопределения одновременности и составит

$$t_{\text{после}} - t_{\text{до}} = \tau(1 - V^2/c^2 - (1 - V^2/c^2)) = 2\tau V^2/c^2.$$

Последовательность набора земными часами времени  $2\tau$ , большого по сравнению со временем  $2\tau/\gamma$ , прожитым космонавтом, складывается в системе космонавта из 1) малого времени  $\tau/\gamma^2$ , набранного на прямом пути, 2) такого же времени на обратном пути и 3) скачка показаний земных часов, возникшего при пересадке и равного  $2\tau V^2/c^2$ . Суммируя эти три длительности, получим

$$2\tau/\gamma^2 + 2\tau V^2/c^2 = 2\tau(1 - V^2/c^2 + V^2/c^2) = 2\tau.$$

Скачок при желании можно понимать как результат резкого ускорения при пересадке. Ускорение, по Эйнштейну, эквивалентно полю тяжести, способному влиять на ход часов. Подчеркнем, что для толкования эксперимента нужен не один космонавт, а две команды, которые впоследствии соберутся и проанализируют свои результаты.

Спросим, почему же сам космонавт не следит за часами в лабораторной системе. Это можно сделать. Но если смотреть все время на ближайшие часы в системе  $K$ , совпадающие по координате с космонавтом, то они показывают промежутки в  $\gamma$  раз **больше**, чем часы космонавта, из-за того, что для космонавта не являются синхронизованными. Например, на пути туда  $t = \gamma(t' + Vx'/c^2) = \gamma t'$ , так как у космонавта  $x' = 0$ . Тогда, если космонавт набрал стаж полета  $2\tau/\gamma$ , на Земле пройдет как раз  $2\tau$ .

Если же космонавту лично смотреть на неподвижного близнеца, будет сказываться запаздывание сигнала. Пусть на пути туда с Земли посылаются сигналы через  $\Delta t$ , хотя бы каждую секунду. Первый сигнал получен при  $t = 0$ , второй придет при выполнении равенства  $Vt = c(t - \Delta t)$ , то есть при  $t = \Delta t/(1 - V/c)$ . Преобразуя ко времени  $t'$ , выберем формулу  $t = \gamma(\Delta t' + Vx'/c^2)$ , откуда промежуток между приемом сигналов на корабле  $\Delta t' = t/\gamma$ . Окончательно имеем

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} > \Delta t.$$

Это равенство выражает релятивистский эффект Доплера. На обратном пути надо поменять

знак  $V$ : при движении навстречу источнику

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} < \Delta t.$$

Поэтому, удаляясь от неподвижного близнеца, космонавт будет видеть его вялым и еле двигающимся (примерно вдвое медленнее, чем предписывает эйнштейновское замедление), а при сближении, наоборот, энергичным и шустрым. Вот при возврате и будет видно, как земной близнец на глазах стареет. Легко получить, что количество сигналов, принятых на пути туда, будет  $\tau(1 - V/c)$ , а на пути обратно космонавт примет  $\tau(1 + V/c)$ ; всего  $2\tau$ . Разумеется, не помешает хороший телескоп.

Эйнштейновское замедление времени Земли с точки зрения космонавта получится, если смотреть на часы неподвижного близнеца – при  $x = 0$  и исключить запаздывание. Для этого и нужна команда космонавтов – наблюдателей, заранее расставленных вдоль оси  $X'$ . Пролетая мимо последовательности часов в  $K'$ , часы земного жителя показывают  $t = \gamma(t' + Vx'/c^2) = \gamma(t' - V^2t'/c^2) = t'/\gamma$ . Разумеется, эти данные будут доступны не сразу, а после сбора ряда наблюдателей и сличения их записей.

Еще раз напомним, что выражения типа «космонавт видит процессы в другой системе замедленными в  $\gamma$  раз» буквально неверны и сбивают с толку, хотя всегда употребляются для краткости. Не космонавт, а целая команда, расставленная вдоль движения, и не видит, а выводит из своих записей. Космонавт же видит замедленными (и не в  $\gamma$ , а в  $\sqrt{(1 + V/c)/(1 - V/c)}$  раз) процессы, которые от него удаляются, а приближающиеся видит убыстренными.

Попробуем использовать для расчета парадокса близнецов еще интервал, как инвариантную величину. Сумма  $\sum \Delta s = \sum \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2}$ , взятая между двумя событиями, не зависит от системы отсчета. В лабораторной системе вдоль пути космонавта  $\Delta x^2 = (V \Delta t)^2$ , и получаем  $c \sum \sqrt{\Delta t^2 (1 - V^2/c^2)} = c \sum \Delta t / \gamma$ . В системе космонавта или, вернее, в совокупности инерциальных сопутствующих систем,  $\Delta x' = 0$ , и та же величина выразится как  $c \sum \sqrt{\Delta t'^2} = c \sum \Delta t'$ . Сразу видно, что полное время в системе космонавта меньше, чем в лабораторной системе, и именно в  $\gamma$  раз. Поскольку интервал – аналог расстояния, существует сравнение: парадокс близнецов ясен примерно в той же степени, как то, что прямая короче кривой. Правда, здесь, наоборот, прямая «длиннее» ломаной (в смысле, что интервал для земного близнеца вдоль прямой мировой линии  $c \sum \Delta t$  больше, чем интервал вдоль ломаной для космонавта  $c \sum \Delta t / \gamma$ ).

Добавим, что если кто так и не понял парадокса близнецов, в этом нет ничего удивительного. До сих пор время от времени возникают споры по этому поводу в научной литературе.