

ВОЛНОВАЯ ФИЗИКА

Курс лекций для ФМШ

Часть 1. ОПТИКА И ВОЛНЫ

1. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

А. П. Ершов

31 января 2005 г.

В последнем семестре нам осталось понять, как устроены окружающие нас предметы. Примерно мы уже знаем, что все сделано из атомов, кроме света, сделанного из фотонов. Но что такое атомы, пока не ясно.

Когда-то существование атомов нужно было доказывать. Сейчас каждый слышит про атомы почти с рождения. Это словно бы и неплохо, но все имеет свои теневые стороны. Привыкнув к идее атома, труднее сформулировать для себя вопрос: почему атомы именно такие? В начале прошлого семестра мы уже отмечали загадку атомного масштаба 1 \AA , или 10^{-8} см. Чем определяется этот размер? Почему бы, например, электрону не летать раз в сто ближе к ядру (или вообще во сколько угодно раз ближе)?

В англоязычных странах популярен отрывок из «Рапсодии» Дж. Свифта:

So, naturalists observe, a flea
 Has smaller fleas that on him prey;
 And these have smaller still to bite 'em;
 And so proceed *ad infinitum*.

т.е. на блохах живут более мелкие блошки, на тех свои паразиты, еще меньше, и так далее до бесконечности. Цитируют эти стихи обыкновенно в глубокомысленном тоне и без комментариев, как бы подразумевая, что умному достаточно. Должно быть, тут отражено восхищение сложностью и неисчерпаемостью мироздания. Эта-то идея бесконечного ряда матрешек и оказалась неверна¹. Действительно, блохи страдают от паразитов: клещей, червей, бактерий. Современный микроскоп показывает душераздирающие картины, например, кишечник блохи, паразитирующей на грызунах, полностью забитый палочками чумы². «Червь, терзающий блоху, сам может быть поражен клещом, в свою очередь зараженным жгутиковыми, в клетках которых живет болезнетворный вирус». Но это и все: никакой организм не может быть меньше, скажем, ста атомных размеров. Прогрессия масштабов быстро доходит до предела, раз всякий паразит значительно меньше хозяина. Всего есть шесть уровней, считая человека, а вовсе не бесконечность³.

Если подумать, то это выходит гораздо интереснее, чем примитивная («дурная») бесконечная иерархия уровней. Мы увидим, что с уменьшением масштаба возникает совершенно новая физика, которую мудрецы прошлого и вообразить не могли.

Это – волновая физика, которой мы и займемся. Атомы такие, как они есть, потому, что они построены из определенных типов волн и сами тоже являются волнами. По сравнению со всем, что у нас было раньше, это – страна чудес. Но начнем, как всегда, с самых простых вещей.

¹На русском языке близким эквивалентом культурной ситуации является стихотворение Пушкина «Движенья нет, сказал мудрец брадатый...».

²Rotshild M., Shlein Y., Ito S. A colour atlas of insect tissues via the flea. Science Book, N.Y., 1986. См. резюме: В мире науки (Scientific American), 1987, №1.

³Свифт вообще живо интересовался масштабным фактором, вспомним его лилипутов и великанов. Ряд интересных подробностей см. в: Н. Винер. Я – математик. РХД, Москва – Ижевск, 2001, стр. 84.

Глава 1

ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

1.1 Цепи переменного тока. Импеданс

Переменный ток, в особенности синусоидальный, очень подходит для начала знакомства с волновой физикой. В то же время эта тема еще электродинамическая, благодаря чему переход будет плавным.

Возьмем RC -цепь, на которую подается переменное напряжение $U(t)$ (рис. 1.1). Какой пойдет ток? Сумма напряжений $RI + q/C = U$ или

$$RI + (1/C) \int I dt = U .$$

Дифференцируем и получаем уравнение

$$R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt} .$$

Для общей зависимости $U(t)$ решение сложное и маловразумительное. Мы рассмотрим частный случай, чтобы понять суть. Пусть $U(t) = 0$ при $t < 0$, $U(t) = U_0$ при $t > 0$ (скачок напряжения). Тогда при $t > 0$ правая часть $dU/dt = 0$. Решаем: $dI/I = -dt/RC$, $I = I_0 \cdot \exp(-t/RC)$. Определяем I_0 : в начальный момент C еще не успел зарядиться; тогда на нем нет напряжения и $I_0 = U_0/R$. Окончательно

$$I = (U_0/R) \cdot \exp(-t/RC) .$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_C = U_0 \cdot (1 - \exp(-t/RC)) .$$

Характерное время спада тока (или заряда конденсатора) $\tau = RC$. Если U меняется за более длительное время, то можно считать, что C успевает заряжаться и на нем будет практически $U(t)$. Конденсатор тогда приблизительно соответствует разрыву в цепи. Если же время изменения U мало по сравнению с RC , то напряжение на емкости малó

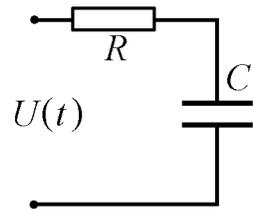


Рис. 1.1.

по сравнению с U (почти все падает на сопротивлении). В этом случае конденсатор работает как «закоротка».

Важен случай синусоидального напряжения: $U = U_0 \cos(\omega t)$. Например, в розетке $\omega = 2\pi \cdot 50 \cong 314$ Гц. Генераторы такого напряжения проще и удобнее (вращающиеся в магнитном поле рамки). Тогда

$$R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -U_0 \cdot \sin(\omega t).$$

Явно должно быть колебательное решение, но ни $\sin(\omega t)$, ни $\cos(\omega t)$ не годятся. Пробуем $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где φ – пока неизвестная постоянная величина, называемая **сдвигом фазы**. Подставляем:

$$\begin{aligned} -RI_0 \sin(\omega t + \varphi) + (I_0/C) \cos(\omega t + \varphi) &= -U_0 \omega \sin((\omega t + \varphi) - \varphi) = \\ -U_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) \cos \varphi + U_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Переменные $\sin(\omega t + \varphi)$ и $\cos(\omega t + \varphi)$ должны уравниваться по отдельности. Отсюда

$$RI_0 = U_0 \cos \varphi, \quad I_0/\omega C = U_0 \sin \varphi.$$

Получаем $\operatorname{tg} \varphi = 1/\omega RC$, $I_0 = U_0/\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$. Решение:

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{где } \operatorname{tg} \varphi = 1/\omega RC.$$

Для наглядности полезны **векторные диаграммы**. Изобразим ток I_0 горизонтальным вектором. Переменный ток $I_0 \cos(\omega t)$ получим, закрутив исходный вектор против часовой стрелки с угловой скоростью ω : горизонтальная проекция вектора именно и даст нужную величину.

Напряжение на сопротивлении RI изобразится вектором, параллельным току. Этот вектор так же вращается, отбрасывая на горизонтальную ось проекцию – настоящее напряжение.

При токе $I = I_0 \cos(\omega t)$ напряжение на конденсаторе (пропорциональное заряду, т.е. интегралу от тока) будет $(I_0/\omega C) \sin(\omega t)$. Его изображаем вектором длины $I_0/\omega C$, направленным под прямым углом к току вниз на рисунке 1.2. Как раз при повороте на угол ωt его горизонтальная проекция будет $(I_0/\omega C) \sin(\omega t)$.

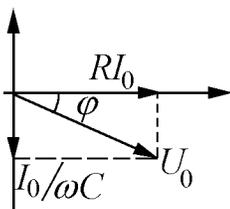


Рис. 1.2.

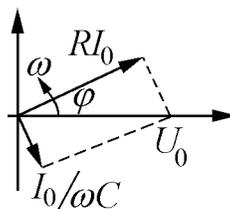


Рис. 1.3.

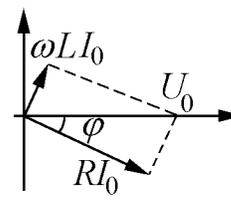


Рис. 1.4.

Сумма реальных напряжений – это сумма проекций на горизонтальную ось, равная проекции суммы векторов. Поэтому можно нарисовать вектор суммарного напряжения длиной $U_0 = I_0 \cdot \sqrt{(1/\omega C)^2 + R^2}$. Это и будет амплитуда входного напряжения. Напряжение отстает по фазе от тока на угол φ , причем $\operatorname{tg}\varphi = 1/\omega RC$.

Для полного соответствия с предыдущим решением можно повернуть картинку в исходном положении на угол φ , тогда горизонтальным вектором изобразится напряжение, а ток будет вектором длины $U_0/\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$, имеющим начальный наклон φ . Далее вся диаграмма крутится со скоростью ω против часовой стрелки (рис. 1.3).

Попробуем метод векторных диаграмм на LR – цепи. В электротехнике в виде исключения удобнее система СИ. Эдс индукции в СИ $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = -L \cdot dI/dt$. Чтобы скомпенсировать ее и прогонять ток через индуктивность (представляющую собой, попросту, кривой провод), нужно приложить напряжение $U_L = +L \cdot dI/dt$. При токе $I_0 \cos(\omega t)$ напряжение на индуктивности $U_L = -\omega LI_0 \sin(\omega t)$. Это будет проекция вектора, опережающего ток на угол $\pi/2$. Сумма векторов напряжений будет $I_0 \cdot \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}$ и направлена под углом φ к току, тоже с опережением; $\operatorname{tg}\varphi = \omega L/R$. Если задать напряжение горизонтальным, $U = U_0 \cos(\omega t)$, придаем картинке начальный поворот на угол φ назад (рис. 1.4). Имеем $I = U_0/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cos(\omega t - \varphi)$.

Результат получается быстрее и нагляднее, чем при прямом решении дифференциального уравнения. Существует специальный математический аппарат, позволяющий еще ускорить решение таких задач.

По формуле Эйлера $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$. Запишем входное напряжение в виде $U_0 \exp(i\omega t)$, то есть прибавим к настоящему U мнимую часть. От добавочного мнимого тока мы избавимся в конце расчета. Ток тоже ищем в виде $I = I_0 \exp(i\omega t)$.

Для цепи с индуктивностью (RL –цепь) напряжение $U_L = +L \cdot dI/dt$. При токе $I = I_0 \exp(i\omega t)$ $U_L = i\omega LI_0 \exp(i\omega t) = i\omega L \cdot I$. Решаем:

$$RI + i\omega LI = U; \quad I = U/(R + i\omega L),$$

так как во всех слагаемых одинаковая зависимость от времени: $\exp(i\omega t)$. Вопрос, как это понимать. Вспомним, что надо взять действительную часть тока. Полезна **показательная форма** комплексного числа:

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \exp(i\varphi), \quad \text{где } \operatorname{tg}\varphi = y/x.$$

Знаменатель будет равен $R + i\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \exp(i\varphi)$, где $\operatorname{tg}\varphi = \omega L/R$. Тогда

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Тот же результат, что при векторном способе. Даже при первой пробе ответ получен быстрее. Аналогично для конденсатора току $I = I_0 \exp(i\omega t)$ соответствует напряжение $U_C = I_0 \exp(i\omega t)/(i\omega C) = I/(i\omega C)$.

Итак, для каждого элемента при токе в виде мнимой экспоненты комплексное напряжение пропорционально току, т.е. существует аналог сопротивления:

$$Z_R = R; \quad Z_C = 1/i\omega C; \quad Z_L = i\omega L.$$

Эти величины называются **импедансами**. Для них выполняются те же правила соединения и законы Кирхгофа, как для обычных сопротивлений, и задачи решаются так же, как в цепях постоянного тока. Только в конце надо выделить действительную часть.

Для резонансного RLC -контура (рис. 1.5) $RI + (1/i\omega C)I + i\omega LI = U$;

$$I = \frac{U}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} \implies \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi),$$

где $\operatorname{tg}\varphi = (\omega L - 1/\omega C)/R$. Зависимость амплитуды тока от частоты – резонансная кривая – похожа на «механическую» (на рис. 1.6 показаны три кривые, у которых отличаются сопротивления). Здесь тоже внешняя сила вызывает колебания, причем аналог массы – L , трения – R , а упругости – $1/C$. Максимум тока – когда $\omega L = 1/\omega C$; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (собственная частота контура). Вблизи ω_0 выражение $(\omega L - 1/\omega C) \cong 2 \cdot \sqrt{L/C} \cdot \Delta\omega/\omega_0$. При характерных величинах $L = 10$ мкГ, $C = 1$ нФ, $R = 0,1$ Ом $\omega_0 = 10^7$ Гц, что соответствует длине волны $2\pi c/\omega_0 = 200$ м. **Волновое сопротивление** $\sqrt{L/C} = 100$ Ом. Ширина резонансной кривой определяется по падению амплитуды тока в два раза, то есть $2 \cdot \sqrt{L/C} \cdot \Delta\omega/\omega_0 = R$, откуда $2\Delta\omega/\omega_0 \sim 10^{-3}$. Такое резкое падение амплитуды с удалением от резонанса типично в радиотехнике и позволяет настроиться на нужную станцию (частоту), не слыша других.

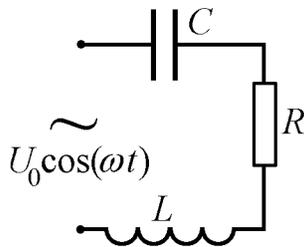


Рис. 1.5.

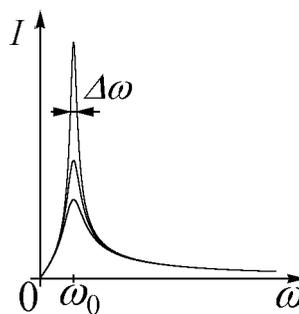


Рис. 1.6.

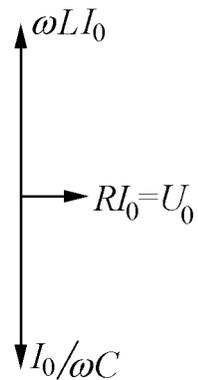


Рис. 1.7.

Пока мы видели, что переменный ток похож на постоянный. Есть и разница. Например, в резонансе напряжение на сопротивлении RI равно входному U . Можно подумать, что на L и C совсем не будет напряжения. Возьмем индуктивность: на ней $U_L = i\omega LI$, амплитуда $= \omega LI = \sqrt{L/C} \cdot I$, что для «хорошего» контура гораздо больше, чем входное напряжение $U = R \cdot I$ (в описанном выше контуре $\sim 1000 \cdot U$). Столько же в резонансе будет на емкости. Но в сумме $U_L + U_C = 0$, так как эти напряжения точно

в противофазе. Векторная диаграмма показана на рисунке 1.7. Видно, что на индуктивности напряжение опережает ток по фазе на $\pi/2$, а на емкости отстает, что просто понять: для L сначала прикладывают напряжение, а затем идет ток; для C вначале нужно пустить ток и после зарядки появится напряжение.

Есть особенности у мощности в цепях переменного тока. На сопротивлении $N = RI_0^2 \cos^2(\omega t)$. Эта величина меняется 100 раз в секунду (для промышленной частоты 50 Гц) и нас не интересуют ее колебания (как правило). Среднее значение $\langle N \rangle = RI_0^2/2$. Приборы показывают **эффективное** значение тока, равное постоянному току, который греет сопротивление с той же эффективностью, то есть $I_0/\sqrt{2}$ для синусоидального тока. Аналогично $U_{eff} = U_0/\sqrt{2}$. В розетке $U_{eff} = 220$ В, а $U_0 \cong 311$ В.

Для цепи со сдвигом фаз $U = U_0 \cos(\omega t)$, $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Средняя мощность $N = U_0 I_0 \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \rangle = (1/2) \cdot U_0 I_0 \cos \varphi = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi$. Например, на индуктивности и емкости средняя мощность нулевая (нечему греться). Для мощных потребителей N и U_{eff} заданы. Поэтому малый $\cos \varphi$ приводит к потреблению большого тока, что нежелательно (растут потери). Стараются приблизить $\cos \varphi$ к 1.

Заметим, что при расчете мощности мы не пользовались комплексными функциями, и правильно делали. Здесь возникают произведения IU , а действительная часть произведения не равна произведению действительных частей (физических величин). Мнимая часть легко отделяется только при линейных операциях.

Вообще же применение функции $\exp(i\omega t)$ – это основа **преобразования Фурье**. Оно позволяет дифференциальные уравнения превратить в алгебраические. Любая периодическая функция раскладывается в **ряд Фурье** – набор простых синусоидальных **гармоник**. Например, «испорченный косинус» – функция

$$\text{sign}(\cos(x)) = (4/\pi) \cdot (\cos(x) - \cos(3x)/3 + \cos(5x)/5 - \dots) .$$

Проверьте на компьютере! Когда такое напряжение подано на вход цепи, находят по отдельности токи, вызываемые каждой гармоникой (пользуясь изложенными выше способами), а потом суммируют все токи.

Математическое дополнение: комплексные числа

Здесь мы не рассматриваем, **зачем** нужны комплексные числа – это вопрос физический, возможно, уже ясный из изложенного выше. Обсудим важнейшие характеристики, свойства и способы представления таких чисел, стараясь избегать формальных выводов.

1. Алгебраическое представление.

Это самая примитивная форма записи комплексного числа (и не самая полезная):

$$z = x + i \cdot y .$$

Здесь x – действительная, или реальная часть (обозначается также $\text{Re}(z)$), y – мнимая часть (обозначается также $\text{Im}(z)$), $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Алгебраическое пред-

ставление удобно, если мы хотим найти сумму и разность комплексных чисел – надо по отдельности складывать действительные и мнимые части:

$$(5 + 3 \cdot i) + (4 + 2 \cdot i) = 9 + 5 \cdot i.$$

Умножение комплексных чисел производится путем раскрывания скобок, с учетом того, что квадрат i равен -1 . Получается довольно невразумительно:

$$(5 + 3 \cdot i) \cdot (4 + 2 \cdot i) = 20 + 12 \cdot i + 10 \cdot i + 6 \cdot i^2 = 14 + 22 \cdot i.$$

Еще неудобнее будет выглядеть правило деления.

Сопряженным числу $z = x + i \cdot y$ называют $\bar{z} = x - i \cdot y$. Произведение любого числа на сопряженное всегда действительно (и даже положительно):

$$(5 + 3 \cdot i) \cdot (5 - 3 \cdot i) = 25 + 15 \cdot i - 15 \cdot i - 9 \cdot i^2 = 34; \quad (x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

2. Геометрическое представление.

Комплексное число можно изобразить и как точку на плоскости с координатами x и y . А точка на плоскости – это все равно что вектор с такими проекциями (рис. 1.8):

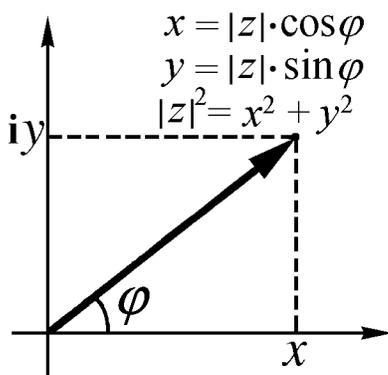


Рис. 1.8.

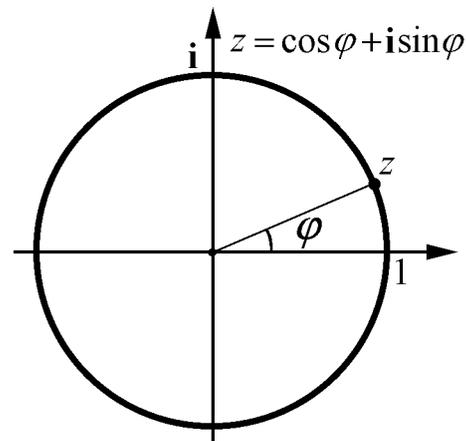


Рис. 1.9.

Тогда в алгебраической записи i можно понимать как единичный вектор в направлении оси y . Единичный вектор по оси x – это просто действительная единица и специально не выделяется. Такая плоскость называется **комплексной плоскостью**. Геометрическое, или векторное, представление придает простой смысл операциям сложения и вычитания: проекция суммы равна сумме проекций, или годятся обычные правила соединения стрелок.

Геометрическое представление естественно приводит к новому способу задания чисел. **Модулем** комплексного числа $|z|$ называется длина вектора, а **аргументом** $\arg z$ – угол между вектором и осью x :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arg z = \arctg(y/x) = \arccos(x/|z|) = \arcsin(y/|z|).$$

Заметим, что квадрат модуля равен произведению комплексного числа на сопряженное:
 $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

3. Тригонометрическое представление.

Из предыдущего ясно, что комплексное число можно записать и так:

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

если φ – это аргумент z . Здесь вся «комплексность» сидит в скобке. Все числа вида $(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ имеют единичный модуль и, значит, в комплексной плоскости лежат на единичной окружности (рис. 1.9).

Тригонометрическая форма позволяет наглядно понять смысл произведения двух комплексных чисел. Перемножим два числа с единичным модулем:

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2).$$

Но это попросту $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$. Получается, что при перемножении двух комплексных чисел их аргументы складываются. (Если есть еще модули, они просто перемножаются, как действительные числа, каковыми модули и являются).

4. Экспоненциальное представление.

Про действительные числа мы знаем, что при перемножении складываются логарифмы:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Это приводит к догадке, что аргумент комплексного числа – это нечто близко связанное с его логарифмом. Догадка оказывается правильной, а именно

$$\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Эта неожиданная связь называется **формулой Эйлера**. Попробуем в ней убедиться.

Снова рассмотрим «чистые аргументы» – числа с единичным модулем. Хотя мы еще слабо представляем себе, что могут означать экспоненты с мнимым показателем, но если в них хоть какой-то смысл есть, то они тоже лежат на единичной окружности. Действительно, квадрат модуля равен произведению числа на сопряженное, $e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi}$, что при любом разумном понимании обращается в 1. Первая проверка пройдена.

Перемножить два числа с единичным модулем – все равно, что сложить аргументы. Такое же свойство будет иметь и произведение $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}$. Это, конечно, еще ничего не доказывает: например, для записи $e^{7i\varphi}$ тоже аргументы суммировались бы. Но для $e^{i\sqrt{\varphi}}$ суммирования не получится (как и для любой функции угла в показателе экспоненты, кроме прямой пропорциональности).

Рассмотрим случай **малого** угла φ . Тогда экспоненту можно записать в виде

$$e^{i\varphi} \approx 1 + i\varphi.$$

Это число, аргумент которого – малый угол, тангенс которого есть φ . Тангенс малого угла равен углу. Поэтому аргумент числа $e^{i\varphi}$ стремится к φ для малых углов. Модуль, как уже установлено, равен 1¹. Значит, для малых углов формула Эйлера получается.

Произвольный угол, например 49 градусов, можно представить как сумму малых, для которых формула выполняется. Перемножая экспоненты с мнимым показателем, мы складываем углы. Вот и выходит, что формула Эйлера правильна для любых углов².

Логарифм произвольного комплексного числа $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ можно записать в виде

$$\ln z = \ln |z| + i \cdot \varphi.$$

1.2 Простейшие импульсные цепи

Возьмем RC – цепь с разрядом конденсатора. Уравнение:

$$R \cdot dI/dt + I/C = 0,$$

решение: $I = (U_0/R) \cdot \exp(-t/RC)$. Характерное время разряда $\tau = RC$. Например, при $C = 10^{-2}$ Ф, $R = 0,01$ Ом, $U = 10$ кВ (довольно большая батарея) время разряда 100 мкс, начальная мощность 10^{10} Вт = 10 ГВт – как у крупной электростанции. Полезно заметить, что тепло на сопротивлении $Q = \int RI^2 dt = CU_0^2/2$ при любом R : если уменьшать сопротивление, растет ток и уменьшается время разряда, причем так, что вся энергия конденсатора выделяется на сопротивлении.

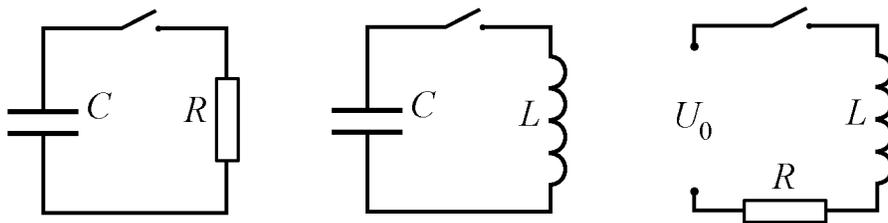


Рис. 1.10.

LC – цепь: уравнение $Ld^2I/dt^2 + I/C = 0$; решение: $I = I_0 \sin(\omega t)$, где $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Амплитуда I_0 определяется из начального условия: при $t = 0$ $LdI/dt = \omega LI_0 = U_0$. Окончательно

$$I = (U_0/\omega L) \sin(\omega t).$$

¹На первый взгляд, модуль больше 1, так как уже действительная часть равна 1. Но это вышло из-за пренебрежения следующими порядками. Например, при учете второго порядка получится $1 - \varphi^2/2 + i\varphi$. Можно усмотреть в действительной части разложение косинуса. Этот уточненный модуль равен 1 с точностью до четвертого порядка. Выше мы установили, что $|e^{i\varphi}| = 1$ точно, и сейчас достаточно разобраться с аргументом этого числа.

²Это следует и из указанной выше линейной связи показателя экспоненты с аргументом.

Отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока $\omega L = \sqrt{L/C}$ – уже знакомое волновое сопротивление.

Наконец, RL – цепь, на которую подано постоянное напряжение U_0 : $LdI/dt + RI = 0$; $I = (U_0/R) \cdot (1 - \exp(-Rt/L))$. Время нарастания тока $\tau = L/R$.

Сложнее случай полной RLC -цепи. Качественно при малом сопротивлении естественно ожидать колебаний, как в LC , но медленно затухающих. При большом же сопротивлении должно быть похоже на RC -цепь, а индуктивность должна давать завал начального фронта импульса тока на малое время L/R . Но эти варианты поведения совсем не похожи. Попробуем разобраться. Уравнение цепи:

$$Ld^2I/dt^2 + RdI/dt + I/C = 0 .$$

Попробуем снова подставить $I = I_0 \exp(i\omega t)$. Как ни странно, уравнение

$$-\omega^2 + i\omega R/L + 1/LC = 0$$

удовлетворяется, если $\omega_{1,2} = iR/2L \pm \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$. Что бы значила комплексная частота?

При $R = 0$ имеем собственную частоту LC – контура. Это успокаивает, видимо, какой-то смысл здесь есть. Если подставить такие ω в экспоненту $\exp(i\omega t)$, получим колебательный множитель $\exp(i\sqrt{\cdot} \cdot t)$, умноженный на $\exp(-(R/2L)t)$. Получается, что мнимая часть частоты означает затухание.

Дальше заметим, что если две функции – решения уравнения, то их сумма – тоже решение (линейность). Попробуем записать решение в виде:

$$A \cdot \exp(i\omega_1 t) + B \cdot \exp(i\omega_2 t) = \exp(-Rt/2L) \cdot (A \exp(i\sqrt{\cdot} \cdot t) + B \exp(-i\sqrt{\cdot} \cdot t)) .$$

Вспоминаем, что $(\exp(ix) - \exp(-ix))/2i = \sin(x)$. Разумно сделать, чтобы получился именно синус (косинус означал бы скачок тока). Тогда $I = I_0 \sin(\sqrt{\cdot} \cdot t) \cdot \exp(-Rt/2L)$. Опять определяем I_0 из начального условия:

$$I = \frac{U_0}{L\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}} \sin(\sqrt{1/LC - R^2/4L^2} \cdot t) \cdot \exp(-Rt/2L) .$$

Это и есть ожидаемые затухающие колебания с частотой, близкой к $1/\sqrt{LC}$ (на самом деле меньшей). При малом R затухание медленное – за время $\sim L/R$ (рис. 1.11, где пунктиром показана ограничивающая экспонента $\pm \exp(-Rt/2L)$).

Что будет при $R > 2\sqrt{L/C}$? Корень тоже получается мнимый – оба решения затухающие. Синус мнимого аргумента выражается через действительные экспоненты и получается гиперболический синус: $\text{sh}(x) = (\exp(x) - \exp(-x))/2$, тоже равный 0 при $x = 0$. Решение:

$$I = (U_0/\Omega L)\text{sh}(\Omega t) \cdot \exp(-Rt/2L) .$$

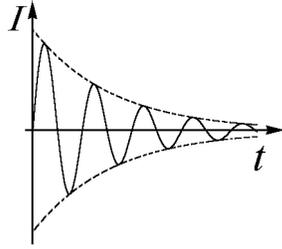


Рис. 1.11.

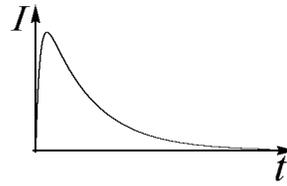


Рис. 1.12.

Здесь $\Omega = \sqrt{R^2/4L^2 - 1/LC}$, и при малых L нарастание до максимума занимает примерно время L/R , после чего будет спад за время RC (рис. 1.12. (Это станет ясно, если воспользоваться биномом Ньютона и упростить Ω)).

Конденсаторная батарея, упомянутая выше, может иметь индуктивность $10 \text{ см} = 10^{-8} \text{ Гн}$. Время нарастания тока при сопротивлении $0,01 \text{ Ом}$ будет 1 мкс . Волновое сопротивление 10^{-3} Ом , так что разряд неперiodический.

Теперь можно разобраться, что будет при **внезапном** подключении некоторой цепи к источнику синусоидального напряжения. Например, подключаем LRC – контур. Известное нам решение, с импедансами и фазовым сдвигом, как правило, не удовлетворяет начальным условиям (ток не нулевой в начальный момент). На самом деле это – установившийся ток. Вначале же к нему добавляются собственные колебания, вызванные подключением. Их и следует подобрать так, чтобы решение подходило под начальные условия. Со временем свободные колебания затухают, и остается только стационарная составляющая. Для произвольной цепи ее «собственное» затухающее решение находится при нулевом поданном напряжении. Физически – находим, как ведет себя замкнутая цепь. Аналогичные **переходные процессы** известны и в механических системах.

Еще оказывается, что импульсные цепи могут выполнять вычисления. Возьмем RC – цепь с большим R , так что почти все напряжение на сопротивлении. Тогда $I = U/R$, а напряжение на конденсаторе $U_C = (1/C) \int I dt = (1/RC) \int U dt$. На конденсаторе сигнал пропорционален интегралу входного напряжения (интегрирующая цепь). Это будет при $RC \gg \tau$ – времени изменения сигнала.

Если в той же цепи мала емкость, так что весь входной сигнал на C , то $U = U_C = (1/C) \int I dt$, ток $I = C \cdot dU/dt$. На сопротивлении будет маленький сигнал $U_R = RC \cdot dU/dt$ – дифференцирующая цепь при $RC \ll \tau$.

В обоих случаях, чем точнее цепь выполняет математическую операцию, тем меньше выходной сигнал. В этом можно усмотреть некоторый закон сохранения неприятностей. До появления цифровых компьютеров из таких (или RL –) цепей строились аналоговые ЭВМ, или интеграторы, иногда довольно сложные. Например, LRC – цепь «решает» дифференциальное уравнение колебаний и может моделировать, скажем, пролет моста при грамотном выборе номиналов. Если взять связанные цепи, можно получить модель моста.