МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

А. П. Ершов

3 ноября 2001 г.

Глава 8

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

До сих пор мы придерживались инерциальных систем отсчета. Иногда все же удобнее **неинерциальные**, но в них есть свои хитрости.

8.1 Фиктивная сила при прямолинейном движении

Простейший случай неинерциальной системы – движение по прямой с ускорением $\mathbf{A}$, скажем, вагона. Сидя в таком вагоне, мы чувствуем «перегрузки». Из инерциальной системы мы рассуждаем так: если мы ускоряемся вместе с вагоном, то на нас действует сила $\mathbf{F} = m\mathbf{A}$, хотя бы из-за деформации спинки кресла. В системе вагона такая сила тоже есть – деформация не исчезла, однако никакого ускорения не имеем. Есть две возможности: либо согласиться, что в ускоренной системе не действует второй закон Ньютона, либо попытаться его модифицировать. Мы примем второй вариант, желая иногда все же пользоваться неинерциальными системами. Тогда силу реакции спинки надо чем-то компенсировать. Это делается введением **фиктивной** (ненастоящей) силы $\mathbf{f} = -m\mathbf{A}$, так что

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{f} = \mathbf{F} - m\mathbf{A} = 0$$

для нашего примера. Следовательно, динамическая задача в инерциальной системе свелась к статике в неинерциальной. Гораздо проще рассмотреть в системе вагона равновесие некоторого ящика, чем его ускорение в системе рельсов.

Для тела, движущегося относительно вагона с ненулевым ускорением $\mathbf{a}'$, ускорение в инерциальной системе будет $\mathbf{a}' + \mathbf{A}$. Значит, (в инерциальной же системе) на него действует суммарная сила $\mathbf{F}$, равная $m(\mathbf{a}' + \mathbf{A})$. Это – сумма каких-то настоящих сил (упругости, тяжести и т.п.). В системе вагона наблюдается только ускорение $\mathbf{a}'$, то есть, кроме настоящих сил, следует добавить еще фиктивную $\mathbf{f} = -m\mathbf{A}$. Естественно, она действует и на подвижные относительно вагона предметы. С учетом фиктивной силы второй закон Ньютона в системе вагона будет иметь вид

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{f} = \mathbf{F} - m\mathbf{A}\ .$$

При этом подходе $\mathbf{A}$ – это константа, которую можно определить для данной неинерциальной системы отсчета раз и навсегда из одного опыта для одного тела, например, подвесив его на пружинке или наблюдая за его свободным движением. Итак, имеем рецепт исправления уравнения движения: в неинерциальной системе отсчета надо учесть, кроме «нормальных» сил, вызванных взаимодействием тел, еще фиктивную силу. Она пропорциональна массе тела и ускорению системы отсчета $\mathbf{A}$ (но имеет обратный знак).

Если посмотреть в окно вагона, окружающие предметы (деревья, здания) имеют ускорение $-\mathbf{A}$. Значит, на них тоже действуют такие же фиктивные силы (настоящие силы для неподвижных в инерциальной системе тел компенсированы). Ускоряются в том числе и предметы, которых мы не видим, и те, о которых мы даже не знаем – короче, вся Вселенная.

Важно понять два обстоятельства:

- Фиктивная сила не вызвана взаимодействием с каким – либо телом.
- Фиктивная сила действует на все тела, в том числе и не находящиеся внутри вагона (на африканских слонов, планету Венера, туманность Андромеды).

Пропорциональность фиктивной силы массе тела напоминает поле тяжести. Действительно, по Эйнштейну, однородное поле тяжести неотличимо от ускоренной системы отсчета. Падая в лифте, мы испытываем невесомость, хотя Земля по-прежнему нас притягивает: в системе лифта фиктивная сила компенсирует тяжесть. То же самое наблюдается в полете по орбите, и по той же причине мы не чувствуем притяжения бесконечных масс Вселенной, падая вместе с Солнцем и системой ближайших галактик. Поэтому иногда говорят, что фиктивная сила – это взаимодействие со всей остальной Вселенной.

8.2 Центробежная и кориолисова силы

Рассмотрим **вращающиеся** системы отсчета. Пусть тело вращается на веревке радиуса R с угловой скоростью $\Omega = V/R$. Тогда его ускорение в инерциальной системе (центростремительное) равно $\Omega^2 R$ и сила натяжения веревки будет $T = m\Omega^2 R$.

Если же смотреть на это тело, стоя на вращающемся с той же угловой скоростью диске, то тело будет неподвижно, хотя натяжение, конечно, не исчезнет. Опять в неинерциальной системе не выполняется закон Ньютона: на неподвижное тело действует нескомпенсированная сила. Попробуем опять ввести фиктивную силу. Она должна компенсировать натяжение и равна $\mathbf{f}_{cen} = m\Omega^2\mathbf{R}$ (направлена наружу). Теперь все в порядке: для тел, неподвижных во вращающейся системе, $m\mathbf{a}' = 0 = \mathbf{F} + \mathbf{f}_{cen}$.

Сила $\mathbf{f}_{cen}$ называется **центробежной**. Это тоже фиктивная сила, не вызванная какими-либо телами и применяемая во вращающейся системе отсчета для «исправления» второго закона Ньютона. Если в инерциальной системе тела, срывающиеся со вращающегося диска, просто летят по касательной, то в системе диска они разгоняются центробежной силой по радиусу. Из-за этой же силы Земля слегка сплюснута: экваториальные области «растаскиваются» наружу. Поверхность воды во вращающемся вокруг продольной оси стакане имеет форму параболы: центробежная сила расталкивает воду от оси.

Центробежная сила определяется константой Ω, одинаковой для всех тел. Физически это, разумеется, угловая скорость вращения системы отсчета. Но важно, что Ω и положение оси, от которой отмеряется R, можно определить опять-таки в небольшом числе опытов, произведенных **не выходя** из вращающейся системы. (Надо измерять сумму реальных сил, приложенных к пробному неподвижному телу, и приравнивать ее $m\Omega^2 R$).

Однако центробежная сила не объясняет других явлений. Как фиктивная сила, введенная в неинерциальной системе, она обязана действовать на все подряд. Но попробуйте завертеться вокруг своей оси. Почему предметы обстановки не срываются с мест центробежной силой?

Тем, кто считает, что эти предметы «не находятся» в неинерциальной системе, рекомендуется перечитать предыдущий параграф. В системе отсчета находится все, что угодно: ваш родной город, звезда Сириус, кит в океане. Это просто система координат, привязанная к телу, в данном случае вашему. Получится нехорошо, если на одни тела $\mathbf{f}_{cen}$ действовать будет, а на другие – нет. Сейчас мы увидим, что она именно действует. Другой вопрос – почему многие предметы движутся не так, как должны бы под ее действием?

Рассмотрим пример. Пусть над краем диска радиуса R, равномерно вращающегося с угловой скоростью Ω вокруг своей оси, располагается тело массы m, которое вращается с угловой скоростью $\omega \neq \Omega$ вокруг той же оси (рис. 8.1). Обеспечить такое движение можно, например, привязав к оси диска и телу жесткую нить. Тогда в неподвижной системе отсчета сила натяжения нити будет обеспечивать необходимое центростремительное ускорение:

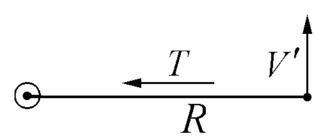

Рис. 8.1.

$$T = m\omega^2 R\,. \tag{8.1}$$

Во вращающейся системе отсчета, связанной с диском, тело будет иметь линейную скорость

$$V' = (\omega - \Omega)R\,. \tag{8.2}$$

Из уравнений (8.1) и (8.2) определим силу натяжения нити:

$$T = m\omega^2 R = m(\Omega + V'/R)^2 R = m\Omega^2 R + 2m\Omega V' + mV'^2/R\,. \tag{8.3}$$

Относительно диска тело имеет центростремительное ускорение

$$a' = V'^2/R\ .$$

Перепишем выражение (8.3) в виде

$$T - m\Omega^2 R - 2m\Omega V' = mV'^2/R\ . \tag{8.4}$$

Уравнение (8.4) очень похоже на второй закон Ньютона: справа стоит произведение массы тела на его ускорение, слева – сумма трех слагаемых. Первое из них – сила натяжения, второе – центробежная сила. Но есть еще третье! Видим, что для «сохранения формы» второго закона Ньютона нужно ввести еще одну «фиктивную» силу:

$$f_{\text{cor}} = -2m\Omega V'\,; \qquad \text{в векторном виде}\ \ \mathbf{f}_{\text{cor}} = 2m[\mathbf{V}' \times \Omega]\ . \tag{8.5}$$

Эта сила называется силой **Кориолиса**, или **кориолисовой силой**, по имени французского физика Г. Кориолиса (1792 – 1843), который ввел ее в обращение. Она действует на тела, движущиеся во вращающейся системе отсчета (у которых $V' \neq 0$).

Потому все вокруг и не падает, если мы закрутимся вокруг оси. При вращении, допустим, против часовой стрелки вектор Ω направлен вверх. Предметы обстановки для нас летают по круговым орбитам по часовой стрелке; для них произведение $[\mathbf{V}' {\times} \Omega]$ будет направлено к центру. По величине (для инерциально неподвижных предметов) $V = \Omega R$, и кориолисова сила будет $2m\Omega^2 R$ – вдвое больше центробежной. Получается в результате $1 \cdot m\Omega^2 R = mV'^2/R$ по направлению к центру. Это как раз и надо, чтобы «заставить» тела вращаться вокруг вас с центростремительным ускорением V'^2/R. (Возможно, стоит отметить, что кориолисова сила отнюдь не всегда равна удвоенной центробежной, как некоторые выводят под впечатлением этого примера).

Вопрос. Почему, если кошка бегает вокруг ведра с водой, центробежная сила в ее системе отсчета не может сделать из ровной поверхности параболическую?

Осталось рассмотреть радиальное движение. Возьмем тело, имеющее постоянную скорость в инерциальной системе и, значит, свободное от настоящих сил (точка A на рис. 8.2). Пусть в начальный момент ($t = 0$) это тело имеет скорость точно ΩR поперек радиуса (значит, нулевую во вращающейся системе) и произвольную V' вдоль радиуса (одинаковую в обоих системах). Через малое время t тело сдвинется по радиусу на $V't$ и поперек радиуса на $y = \Omega R t$ в новое положение B.

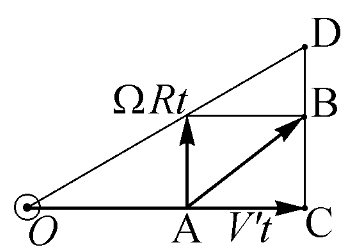

Рис. 8.2.

Точка C, отмеченная на вращающемся диске на новом радиусе $(R{+}V't)$, сдвинулась бы в поперечном направлении на расстояние $z = \Omega(R + V't)t$ в точку D. Поэтому во вращающейся системе тело сдвинется не только вдоль радиуса, но и поперек – на разность DB = $z - y = \Omega V' t^2$ (вниз на рисунке, то есть отстанет от диска). Это тоже объясняется действием кориолисовой силы $2m[\mathbf{V}' \times \Omega]$. Поперечное смещение из-за нее $2mV'\Omega t^2/2$ точно такое, как надо.

Таким образом, во вращающейся системе нужны **две** фиктивные силы : центробежная и кориолисова. Полное уравнение движения

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{f}_{cen} + \mathbf{f}_{cor} = \mathbf{F} + m\Omega^2\mathbf{R} + 2m[\mathbf{V}' \times \Omega] ,$$

где $\mathbf{F}$ – настоящая сила.

Кориолисова сила заставляет реки северного полушария подмывать правый берег (в южном наоборот). Она же закручивает циклоны – тропические ураганы. Для урагана необходима жаркая погода, вызывающая сильное испарение и поднятие нагретого воздуха, и сила Кориолиса, которая закручивает сходящиеся к освободившемуся месту потоки воздуха. Сила Кориолиса в южном полушарии закручивает ураган по часовой стрелке, а в северном – против (отклоняет потоки вправо). На экваторе ее влияние нулевое (возможна только вертикальная составляющая), и поэтому ураганы возникают в сороковых («ревущих») широтах, где еще достаточно жарко.

Теперь мы можем квалифицированно ответить на вопрос, «есть ли центробежная сила». Получается, что центробежная сила, как и другие фиктивные силы, существует **в неинерциальных системах отсчета**, то есть совсем в другом смысле, чем настоящие силы, вызванные взаимодействием тел. Как ни расценивать фиктивные силы – как результат «плохой» кинематики, перехода в систему отсчета, или как воздействие удаленных галактик – природа их совершенно другая, чем каких-нибудь сил упругости.

В принципе, любая задача решается как в инерциальной системе (с учетом только настоящих сил), так и в неинерциальной (с добавлением еще и фиктивных). Представим себе маятник Фуко на полюсе. В системе Земли он поворачивает плоскость своих колебаний под действием кориолисовой силы, а в инерциальной системе просто сохраняет эту плоскость, а вращается, наоборот, Земля. Надо выбирать систему из соображений удобства. Допустим, в средних широтах этот маятник удобнее рассмотреть в неинерциальной системе, где все-таки будет фиксировано направление вертикали.