

МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

ДВИЖЕНИЕ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

А. П. Ершов

25 октября 2003 г.

Он умер, да! Но он не мог упасть,
Войдя в круги планетного движенья.
Бездонная внизу зияла пасть,
Но были слабы силы притяженья.

Глава 6

ДВИЖЕНИЕ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Еще у греков (Птолемей, Гиппарх) существовали кинематические теории движения планет. По современным представлениям, это было описание движения из земной системы отсчета, в виде суммы равномерных вращений по специально подобранным кругам. После многих усовершенствований получилась довольно точная теория.

Коперник предложил систему отсчета Солнца, как более выделенного центра (сейчас можно сказать – более инерциальную). Планеты летали с постоянной скоростью по кругам, как наиболее совершенным фигурам. Теория получилась проще, но хуже по точности, так как не было подгоночных параметров (на самом деле орбиты не круговые).

Тихо Браге провел наиболее точные измерения, а впоследствии Кеплер описал их тремя законами, которые излагаются ниже.

Наконец, более 300 лет назад Ньютон впервые смог объяснить движение планет. Люди впервые поняли устройство мироздания. Вся современная наука началась с небесной механики.

6.1 Гравитационная сила. Третий закон Кеплера

Считается, что однажды, около 1667 г, на Ньютона в его саду упало яблоко. Ньютон задумался над вопросом, почему все падает на Землю. Было очевидно существование притягивающей силы. Но вопрос, далеко ли она действует. На вершинах гор притяжение сохраняется. Может ли оно доставать до Луны?

Ньютон же, как открыватель механики, рассмотрел движение спутника по круговой орбите. Круговая скорость вблизи поверхности Земли $V_1 = \sqrt{g_0 R_\oplus} = 8$ км/с соответствует периоду обращения $T_0 = 2\pi R_\oplus / V_1 = 6,28 \cdot 6400 / 8 \approx 5000$ с (84 мин = 1,4 час).

Как же меняется сила тяготения с удалением от Земли? К счастью для науки, у Земли имеется естественный спутник – Луна. Радиус ее орбиты $R = 384000$ км в 60 раз

превышает радиус Земли. Естественно попытаться оценить ускорение силы тяжести на орбите Луны. Вряд ли можно сомневаться, что именно притяжение Земли заставляет Луну обращаться по орбите.

Период обращения Луны вокруг Земли – приблизительно 1 месяц:

$$T \approx 30 \cdot 24 = 720 \text{ ч} = 2,6 \cdot 10^6 \text{ с}.$$

Скорость Луны на орбите $V_L = 2\pi R/T = 6,28 \cdot 3,8 \cdot 10^8 / 2,6 \cdot 10^6 \approx 1000 \text{ м/с}$. Ускорение Луны $a_L = V_L^2/R$ сравним с g . Скорость приблизительно в 8 раз меньше, чем у низко летящего спутника, а радиус обращения в 60 раз больше. Следовательно, ускорение Луны

$$a_L \approx g/(60)^2.$$

Точные вычисления дают именно 60^2 , а не $60 \cdot 64$ (надо учесть, что первая космическая скорость на самом деле $7,9 \text{ км/с}$, а период обращения Луны, наблюдаемый с Земли ($29,5$ сут), больше «настоящего» периода в инерциальной системе, связанной с Солнцем ($27,3$ сут), из-за годового вращения Земли по орбите).

Итак, при увеличении расстояния в 60 раз ускорение, а значит, и вызывающая его сила тяготения Земли уменьшается в $3600 = 60^2$ раз. Ньютон сделал вывод, что земное тяготение спадает обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли. Радиус орбиты Луны при Ньютоне уточнялся, и он не публиковал расчет около 20 лет, пока не получил совпадение с точностью 2%.

В буквах: $T = 2\pi R/V$, $V = \sqrt{gR} = V_1 \sqrt{(g_0 R_\oplus^2 / R^2) R} \sim R^{-1/2}$, $T \sim R^{3/2}$. Ньютону был известен **третий закон Кеплера**: квадраты времен обращения относятся как кубы больших полуосей орбит. Для круговых орбит полуось – это радиус, и мы видим, что такой закон получается при силе притяжения, спадающей обратно пропорционально квадрату расстояния. Попутно оказалось, что такая же сила объясняет движение планет вокруг Солнца, спутников Юпитера и т.д.

Далее, тяжесть пропорциональна массе тела (еще Галилей показал, что все тела падают с одним ускорением). Но раз тела притягиваются взаимно, должна входить и масса второго тела:

$$F = G \cdot \frac{Mm}{R^2}$$

(закон всемирного тяготения). Постоянная G , по измерениям Кавендиша и др., равна $6,67 \cdot 10^{-8}$ в системе СГС ($\text{см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$). При движении вокруг заданного тела M мы чувствуем только произведение GM . Зная G , можно найти M («взвесить Землю»), например из равенства $GMm/R_\oplus^2 = mg_0$. Отметим, что всегда входит произведение GM , поэтому не обязательно запоминать по отдельности G и массы различных небесных тел. Проще помнить, скажем, размеры орбит и скорости планет/спутников или периоды обращения. Векторный вид закона тяготения:

$$\mathbf{F} = -G \cdot \frac{Mm}{R^2} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Минус означает притяжение (против $\mathbf{R}$). Можно показать (отложим до будущего года), что сфера и шар заданной массы притягивают малое тело, находящееся снаружи, как если бы их масса была помещена в центр. На тело, находящееся внутри, сфера не действует совсем, а у шара «работают» только внутренние слои (которые ближе к центру).

6.2 Момент импульса и второй закон Кеплера

Гравитационная сила центральная, и у каждой планеты должен сохраняться момент импульса, посчитанный из Солнца:

$$L = mV_{\perp}R = \text{const}.$$

Здесь $V_{\perp}$ – поперечная скорость (перпендикулярная к радиусу). Произведение $V_{\perp}R\Delta t$ – это удвоенная площадь малого треугольника, заметаемого планетой за время Δt (рис. 6.1). **Второй закон Кеплера** как раз и утверждает, что за равные промежутки времени данная планета замечает равные площади. (Разумеется, другая планета заметет другое). Чем ближе к Солнцу, тем больше поперечная скорость планеты.

Ситуация аналогична примеру 1 из п. 5.3. Заметим, что сохраняется не поперечная скорость (хотя сила ей перпендикулярна), а произведение поперечной скорости на радиус. Рекомендуется обдумать этот парадокс.

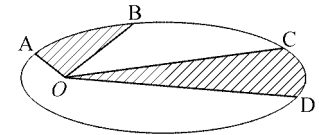


Рис. 6.1.

Кроме Солнца, есть сила со стороны других планет. Рассмотрим взаимодействие примерно одинаковых планет, как Земля и Венера. Момент силы со стороны второй планеты $M \sim (Gm^2/R^2) \cdot R$. Время, за которое такой момент силы способен заметно изменить момент импульса, будет порядка $L/M = mVR/(Gm^2/R)$. То же можно написать как $mV/(Gm/R^2)$, то есть импульс/силу, или $V/(Gm/R^2)$: скорость/ускорение. Если бы в силе стояло произведение масс Солнца и планеты, как раз бы вышло время порядка года – периода обращения. Теперь же получится характерное время, большее в отношении масс Солнца и планеты, то есть $2 \cdot 10^{33}/6 \cdot 10^{27} \sim 10^6$ лет. Астрономически это время пустяковое.

Казалось бы, планетные системы из-за взаимного влияния должны быть крайне неустойчивы. Но сейчас считается, что Солнечная система существует стабильно уже несколько миллиардов лет. Реально за много оборотов планеты момент силы от других планет часто меняет знак и в среднем практически нулевой, что частично объясняет устойчивость планетных орбит. Но верно и то, что не всякая орбита стабильна. Легко понять, что каждая планета создает вокруг себя «окно» пустоты, откуда весь материал захватывается или выбрасывается. Но не надо думать, что зона влияния планеты

ограничена орбитами соседей – гравитационная сила дальнодействующая. Например, если периоды кратные, или отношение их близко к отношению небольших целых чисел, возможны резонансы. При формировании Солнечной системы наверняка повсюду возникали короткоживущие сгустки вещества, но выжили среди них только те, которые «договорились» между собой, то есть имели устойчивые орбиты. Устойчивость Солнечной системы исследуется до сих пор. Из-за большого времени ее существования и сложности задачи (взаимодействуют 9 больших планет) численные расчеты только в последние годы стали давать сколько-нибудь определенные результаты, для чего были построены специальные компьютеры.

6.3 Эффективная потенциальная энергия

Запишем закон сохранения энергии для планеты:

$$\frac{mV_R^2}{2} + \frac{mV_\perp^2}{2} - \frac{GMm}{R} = E.$$

Потенциальная энергия выбрана нулевой на бесконечности. Скорость разложена на две перпендикулярные составляющие: V_R вдоль радиуса и поперечную $V_\perp$. Из сохранения момента импульса $mV_\perp R = L$. Выражаем $V_\perp$ и подставляем:

$$\frac{mV_R^2}{2} + \frac{L^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R} = E.$$

Если ввести функцию $U_{eff}(R) = L^2/2mR^2 - GMm/R$, то получаем закон сохранения энергии для одномерного движения, но с другой потенциальной энергией U_{eff} вместо настоящей $U = -GMm/R$:

$$\frac{mV_R^2}{2} + U_{eff}(R) = E.$$

U_{eff} называют **эффективной потенциальной энергией**. Планета движется по радиусу так, как если бы происходило одномерное движение в поле с потенциальной энергией U_{eff} .

График $U_{eff}(R)$ показан на рис. 6.2. При малых R эффективная потенциальная энергия положительна и велика (преобладает первое слагаемое). При $R = R_1 = L^2/(2GMm^2)$ U_{eff} обращается в нуль, а при больших R отрицательна, имея минимум при $R_2 = 2R_1$ и далее возрастая до нуля. Отсюда видно, что движение качественно разное при положительной и при отрицательной полной энергии E .

При $E < 0$ планета колеблется (по радиусу) в потенциальной яме. Минимально возможная E отвечает минимуму U_{eff} .

Тогда на радиусе доступна одна точка, то есть планета вращается по кругу, при этом

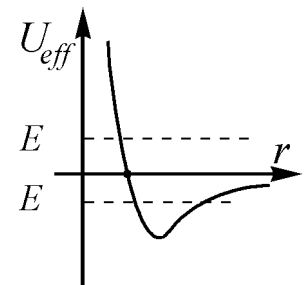


Рис. 6.2.

$E = -mV^2/2 = -GMm/2R_2$. С повышением E разрешенная область колебаний по радиусу растет. Как это делалось в п. 4.4, можно вычислить период колебаний (проведя громоздкое интегрирование). Увеличение E до нуля расширяет границы движения от R_1 до бесконечности и увеличивает период.

При положительной полной энергии частица отражается от потенциального барьера при $R < R_1$, то есть радиус проходит через минимум и затем растет до бесконечности. Значит, в системе двух тел невозможен гравитационный захват, который требовал бы перехода от положительной полной энергии к отрицательной. Отталкивающий барьер возникает из-за первого слагаемого $L^2/(2mR^2)$ в эффективной энергии и называется **центробежным**. Как ни странно, при ненулевом моменте импульса L (когда есть хоть малая поперечная скорость) нельзя добраться до центра притягивающего поля. Из-за сохранения L поперечная скорость с уменьшением радиуса растет, и на продольную не хватает энергии. Поэтому не наблюдается падение на Солнце комет (хотя они ежегодно «пытаются») и почти невозможно попасть в Солнце ракетой. Для космонавта реальнее опасность погибнуть от недостатка воздуха на орбите, если нет топлива для торможения (уменьшения момента импульса), чем опасность упасть с орбиты из-за сопротивления атмосферы, которое может сказаться после месяцев полета¹.

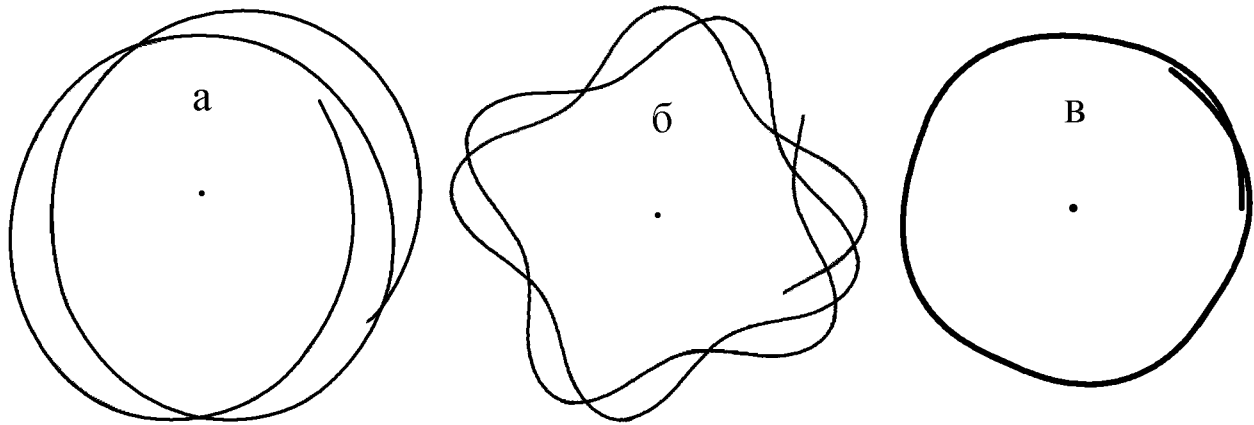


Рис. 6.3.

Кроме движения по радиусу, планета еще вращается вокруг Солнца, то есть движется и «по углу». Поскольку момент импульса сохраняется, $L = mRV_{\perp} = mR^2\omega = mR^2d\varphi/dt$, угол φ изменяется монотонно (все время растет), хотя и неравномерно. Наложение колебаний по радиусу и вращения может давать различные (вообще говоря, незамкнутые) траектории в зависимости от соотношения между временем оборота T_{φ} и периодом колебания по радиусу T_R (рис. 6.3). Для варианта а) T_{φ} слегка больше

¹Упасть на Солнце или планету все же можно, поскольку это не точки, а довольно большие шары. С 16 по 22 июля 1994 года на Юпитер падали обломки кометы SL9 (размерами в несколько километров, со скоростью около 60 км/с). На Землю постоянно падают метеориты. Однако «прицелиться» в мишень, несмотря на ее притяжение, надо очень точно.

T_R , а для вариантов б), в) $5T_R > T_\varphi > 4T_R$. Варианты б) и в) отличаются амплитудой колебания по радиусу. В случае б) часть траектории «выпукла внутрь». Центростремительное ускорение направлено в таких местах наружу. В ньютоновском поле такая траектория невозможна: Солнце всегда притягивает планету к себе, а для траектории б) в местах наибольшего сближения центр явно отталкивает «планету». Однако в поле притяжения возможны траектории типа а) и в), в любой точке выпуклые наружу.

Уникальность ньютоновского закона тяготения, оказывается, состоит в том, что для любой финитной (т.е. не уходящей на бесконечность) орбиты $T_\varphi = T_R$! Это значит, что орбита **замкнута**. Повернувшись на угол 2π , планета приходит в ту же точку с той же скоростью. Как выяснил еще Кеплер,

планеты движутся по эллипсам, причем Солнце находится в одном из фокусов.

Траектории же более общего вида, типа показанных на рис. 6.3, возможны в полях, отличающихся от ньютоновского (например, если показатель степени в формуле для силы не равен (-2)).

6.4 Первый и третий законы Кеплера

Найдем уравнение траектории. Чтобы доказать, что планета обращается по эллипсу, прежде надо как минимум понять, что такое эллипс. По необходимости вывод получится довольно длинным.

Используем как исходную точку круговое движение, в котором мы уже неплохо разбираемся. Пусть спутник обращается вокруг притягивающего центра O по круговой орбите радиуса R . На него действует сила $\mathbf{F}$, все время направленная к центру. Поскольку сила в каждой точке орбиты перпендикулярна перемещению, она не меняет величины скорости v , а только поворачивает вектор $\mathbf{v}$, так что он остается перпендикулярным радиусу. Хотя величина v не меняется, сам вектор $\mathbf{v}$, конечно, не будет постоянным. За малое время Δt сила производит изменение $\Delta \mathbf{v}$, по величине равное $F\Delta t/m$, а направленное перпендикулярно $\mathbf{v}$, т.е. к центру. В результате скорость постоянно поворачивается.

Переведем спутник на некруговую орбиту, придав ему в «верхней» точке орбиты A дополнительную скорость $\mathbf{u}$, направленную вдоль радиуса. Результирующая скорость в точке A уже не перпендикулярна радиусу, и новая орбита заведомо не будет круговой. По крайней мере, вначале спутник будет удаляться от центра (рис. 6.4). Нам нужно доказать, что новая орбита – это эллипс с фокусом в точке O .

Заметим, что на новой орбите спутник имеет тот же самый момент импульса, что был у него на круговой. Действительно, в точке A добавка скорости $\mathbf{u}$ точно радиальна, а момент импульса определяется поперечной скоростью. При последующем движении по орбите момент импульса тоже не меняется как сохраняющаяся величина. (Если бы мы толкнули спутник не по радиусу, момент импульса стал бы, конечно, другим.) Дру-

гими словами, за время Δt радиус-вектор на новой орбите заметет такую же площадь, какую замет бы за этот же промежуток Δt на старой круговой (см. рис. 6.4).

Отсюда ясно, что за **равные** промежутки времени на круговой и на новой орбите радиус-вектор спутника поворачивается на **различные** углы. Для малого угла поворота φ площадь сектора круга будет приблизительно $R^2 \sin \varphi / 2 \approx R^2 \varphi / 2$. Для сектора новой орбиты площадь будет $r^2 \varphi_1 / 2$ (так как угол φ_1 мал, начальный и конечный радиусы практически одинаковы). Если эти площади равны, то угол φ_1 явно меньше φ на начальном участке траектории, где $r > R$.

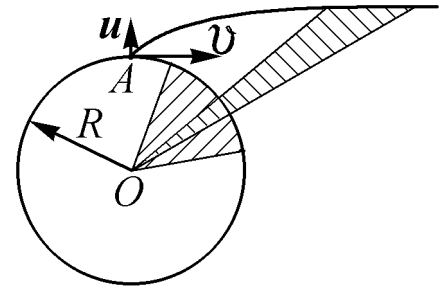


Рис. 6.4.

Нам будет удобнее, сравнивая две орбиты, брать **разные** промежутки времени, причем такие, чтобы **одинаковым** был **угол** поворота радиус-вектора. Поскольку за небольшие интервалы движение можно считать равномерным, углы φ и φ_1 пропорциональны интервалам времени. Если за время Δt мы имели на круге φ , а на новой орбите за то же время выйдет угол $\varphi_1 = (R^2/r^2)\varphi$, то его надо увеличить в r^2/R^2 раз, для чего потребуется время

$$\Delta t_1 = (r^2/R^2)\Delta t.$$

При $r > R$ радиус-вектор вращается медленнее, требуется большее время для поворота на тот же угол.

Полученная формула следует только из сохранения равенства заметаемых площадей для двух орбит, т.е. из центральности силы. Теперь используем ньютоновскую зависимость силы от расстояния. Сначала запишем изменение вектора импульса $m\Delta \mathbf{v}$ за время Δt для круговой орбиты:

$$m\Delta \mathbf{v} = \mathbf{F}\Delta t.$$

На новой же орбите за время Δt_1 изменение импульса происходит под действием изменившейся силы $\mathbf{F} \cdot R^2/r^2$:

$$m\Delta \mathbf{v}_1 = \mathbf{F} \cdot \frac{R^2}{r^2} \cdot \Delta t_1 = \mathbf{F} \cdot \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{R^2} \Delta t = \mathbf{F}\Delta t.$$

Получается удивительно простой результат: для наших двух орбит

при повороте радиус-вектора на одинаковый угол изменения вектора скорости точно одинаковы!

Но если это выполняется для каждого малого поворота, то и для любых углов как суммы малых поворотов получаем то же самое.

Теперь мы можем легко найти скорость в любой точке новой траектории. Проведем в эту точку (Т на рис. 6.5) радиус-вектор. Он пересечет в некоторой точке Т' исходную окружность. На пути от А до Т' по окружности вектор скорости изменился: из горизонтального $\mathbf{v}_0$ получился $\mathbf{v}$, перпендикулярный ОТ. Но **таким же** будет изменение

вектора скорости при движении по новой траектории. В точке А скорость была $\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$, значит, в точке Т будет $\mathbf{v} + \mathbf{u}$!

Нам удалось выяснить важную вещь. Достаточно провести в любую точку орбиты радиус-вектор, отложить перпендикулярно ему (постоянный по величине) вектор круговой скорости $\mathbf{v}$ и прибавить (постоянный по величине и направлению) вектор $\mathbf{u}$, и мы получим полный вектор скорости в этой точке.

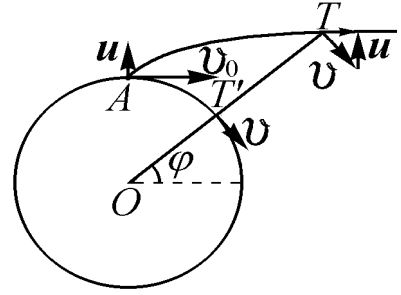


Рис. 6.5.

Вооружившись новыми сведениями, мы можем получить и аналитическое уравнение орбиты. Запишем постоянный момент импульса в виде

$$L = mvR = m(v - u \cdot \cos \varphi) \cdot r$$

(слева – исходное значение, справа – значение в произвольной точке, $v - u \cdot \cos \varphi$ – это поперечная скорость), имеем

$$r = \frac{R}{1 - (u/v) \cdot \cos \varphi} . \quad (6.1)$$

Это и будет уравнением орбиты в полярных координатах, при условии $u < v$ – уравнением эллипса.

Но точно ли это эллипс? Безусловно, получился не круг: r явно зависит от угла φ . Ясно также, что зависимость периодическая с периодом 2π , т.е. через полный оборот значения радиуса повторяются. Значит, орбита **замкнута**. Но может быть, это всего лишь какой-то овал?

Эллипс – это кривая, у которой сумма расстояний до двух данных точек, называемых **фокусами**, постоянна. Обозначим эту постоянную $2a$ и запишем это условие (рис. 6.6):

$$r + \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cdot \cos \varphi} = 2a .$$

Здесь $2c$ – расстояние между фокусами. Освобождаясь от корня, получаем уравнение точно в такой форме, как (6.1):

$$r = \frac{(a^2 - c^2)/a}{1 - (c/a) \cdot \cos \varphi} . \quad (6.2)$$

Длина a – это **большая полуось** эллипса, отношение c/a называется **эксцентриситетом** и обозначается ε , комбинация $p = (a^2 - c^2)/a = a(1 - \varepsilon^2)$ – это **параметр** эллипса (для нашего построения параметром эллипса является радиус R исходной круговой орбиты). Значит, мы наконец доказали, что

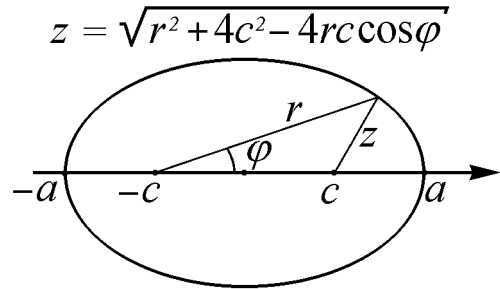


Рис. 6.6.

планеты обращаются по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. (Быть может, не помешает отметить, что в другом фокусе ничего замечательного не находится.)

При другой зависимости силы от расстояния, отличающейся от закона обратных квадратов, замкнутой фигуры, вообще говоря, не будет (период колебаний по радиусу не равен периоду обращения). То, что в ньютоновском поле получаются стабильные замкнутые орбиты, служит для весьма точного подтверждения степени 2 в законе тяготения.

Полезно выразить элементы орбиты не через параметры u , v , R , которые возникли несколько искусственным образом, а через сохраняющиеся величины – энергию и момент импульса. На исходной круговой орбите

$$mv^2/R = GMm/R^2, \quad v = \sqrt{GM/R},$$

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} \equiv -\frac{mv^2}{2} \equiv -\frac{GMm}{2R}, \quad L = mvR = m\sqrt{GMR}.$$

На новой орбите момент импульса тот же, откуда сразу получаем

$$R = \frac{L^2}{GMm^2}.$$

После толчка, переводящего на эллиптическую орбиту, энергия увеличивается:

$$E = E_0 + mu^2/2 = -mv^2/2 + mu^2/2, \quad u = \sqrt{v^2 + 2E/m}.$$

Нам нужно отношение $u/v = \sqrt{1 + 2E/mv^2} = \sqrt{1 + 2ER/GMm}$. Подставляя в него найденное выше R , имеем

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi}, \tag{6.3}$$

где

$$p = L^2/(GMm^2), \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}. \tag{6.4}$$

При отрицательной энергии (ограниченное движение) $\varepsilon < 1$. Тогда знаменатель в (6.3) всегда положителен. Радиус r меняется в пределах от $p/(1 + \varepsilon)$ до $p/(1 - \varepsilon)$. Для окружности эксцентриситет $\varepsilon = 0$, а у вытянутого эллипса эксцентриситет близок к 1. Другими словами, если тело вращалось по кругу со скоростью v и мы добавим скорость вдоль радиуса $u \leq v$, энергия останется отрицательной и тело не уйдет на бесконечность.

При положительной энергии $\varepsilon > 1$ и знаменатель $(1 - \varepsilon \cos \varphi)$ обращается в нуль при $\cos \varphi = 1/\varepsilon$ (например, для $\varepsilon = 2$ при углах $\pm 60^\circ$). Радиус при этом обращается в бесконечность. Такая кривая называется **гиперболой** (в рамках нашего вывода гипербола получается при $u > v$). По гиперболам летят метеориты и кометы, приходящие из других звездных систем – на бесконечности они имеют, само собой, положительную

кинетическую энергию. При нулевой энергии $\varepsilon = 1$ и траектория – **парабола**, для которой $u = v$, т.е. полная скорость $\sqrt{u^2 + v^2}$ в $\sqrt{2}$ раз больше круговой v ; это как бы вторая космическая скорость для данного расстояния R от центра). Виды кривых при $\varepsilon = 0,5$ (эллипс), $\varepsilon = 1$ (парабола) и $\varepsilon = 2$ (гипербола) приведены на рис. 6.7, а–в.

Интересно, что все три кривые получаются при сечении конуса плоскостью (конические сечения, рассмотренные Аполлонием еще в III веке до н.э.). Ясно, как получить таким образом круг, а эллипс получится, если косо разрезать цилиндр; поскольку же конус отличается от цилиндра, то интуиция не приветствует возможность получить эллипс сечением конуса. Тем не менее эллипс выходит, причем два шара, «зажатых» между поверхностью конуса и секущей плоскостью, касаются последней именно в фокусах эллипса (теорема Адамара, попробуйте ее доказать). Что будет со вписанными шарами в случаях параболы и гиперболы?

С древности орбиты светил пытались свести к «идеальным» кривым. Еще Коперник заставлял планеты летать по кругам как наиболее совершенным фигурам. Кеплер установил, что планеты движутся по эллипсам (которые тоже «совершенны», хотя, конечно, не в такой степени, как круги), и считал этот результат окончательным. Если бы данные Тихо Браге были точнее раз в десять, Кеплер заметил бы малые отклонения от эллиптичности, т.е. – крушение всех его надежд. В такой ситуации впору возвращаться к поправкам типа Птолемеевых. Изобретательности Кеплеру было не занимать: представление об этом дают его идеи, согласно которым планетные орбиты таковы, что в них должны поочередно вписываться правильные многогранники. Но, конечно, какого-либо совершенства подправленным орбитам приписывать уже нельзя.

С позиций же динамики эллипс – это только первое приближение, и с учетом взаимного влияния планет нет никаких оснований ожидать какого-либо «совершенства» орбиты. Гармонию следует искать в другом месте – в замечательной простоте закона тяготения. Планеты не обязаны ходить по предустановленным орбитам, но их движение можно предсказать, зная силы и начальные условия.

Заметим, что закон всемирного тяготения и вся механика Ньютона «произошли» из исследования планетных орбит. Книга Ньютона «Математические начала натуральной философии», содержащая его основные результаты в механике, в том числе и закон

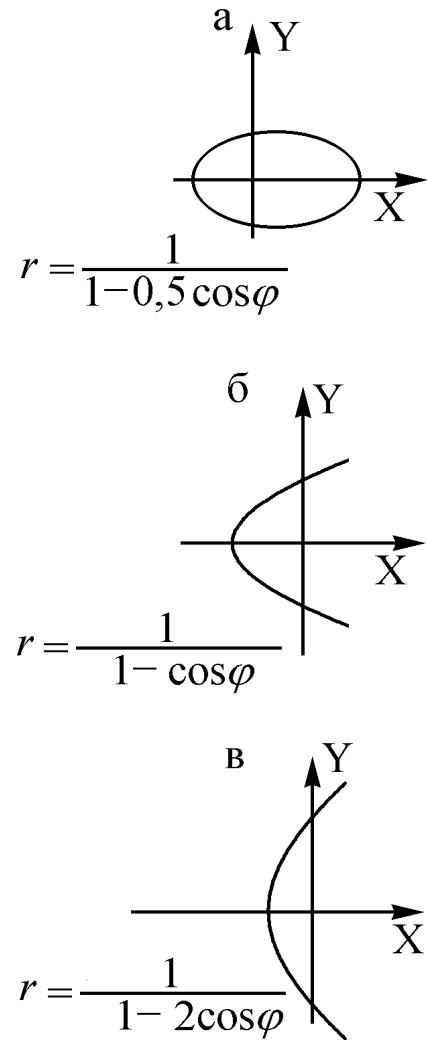


Рис. 6.7.

всемирного тяготения, вышла в 1687 г. Ньютон написал эту книгу благодаря настойчивости Эдмунда Галлея (1656–1742), известного астронома.

Описанный выше вывод закона Кеплера позволяет очень просто найти траекторию планеты графически. Зная скорость, строим перемещение за небольшой интервал Δt и получаем новую точку траектории. Проводим в эту точку радиус-вектор и строим новое перемещение. Как мы выяснили, вектор скорости меняется так же, как на круговой орбите, т.е. всякий раз складывается из перпендикулярной радиусу круговой скорости $\mathbf{v}$ и постоянной скорости $\mathbf{u}$. Поэтому всякий раз надо откладывать одно и то же перемещение $v\Delta t$ перпендикулярно радиусу, а затем $u\Delta t$ вверх. Повторяя эту процедуру, получаем всю орбиту.

Задача.

а). Имеется исходная круговая орбита. Изображенная в определенном масштабе на миллиметровке, она имеет радиус 5 см. Пусть круговая скорость равна 2, а интервал $\Delta t = 1$, что соответствует перемещению 2 см за каждый шаг. Скорость u , которую спутнику придали, чтобы сбить с круговой орбиты, пусть будет вдвое меньше. На рис. 6.8, а показаны несколько первых шагов; каждый раз отмеряем 2 см перпендикулярно текущему радиусу и 1 см вверх. Построить на миллиметровой бумаге полную траекторию, пользуясь чертежным треугольником для построения перпендикуляра к радиусу и линейкой либо циркулем отмеряя расстояния.

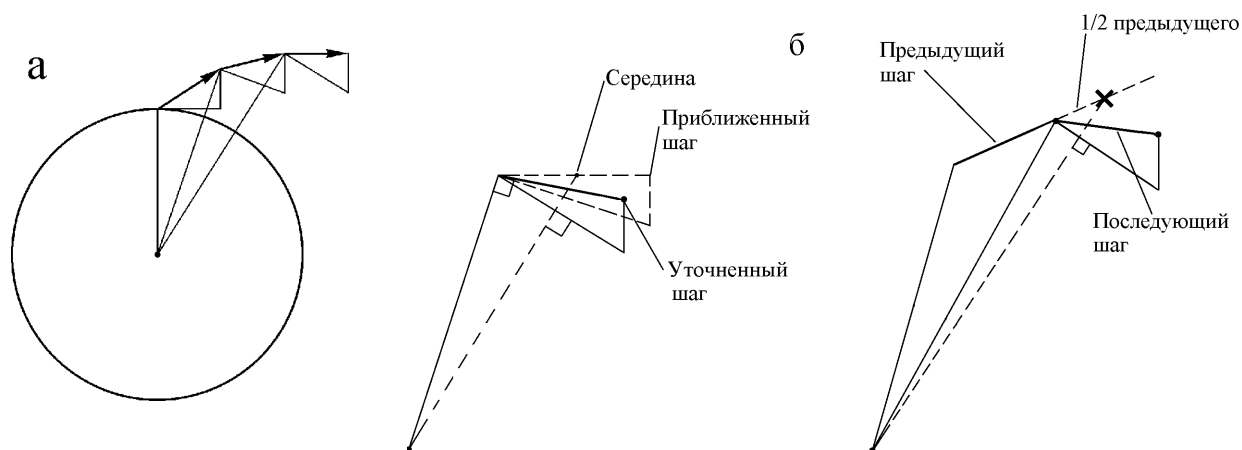


Рис. 6.8.

б). Простейший метод построения, описанный выше, далек от совершенства. Например, при нулевой добавке u вместо круга выйдет разворачивающаяся спираль. Чтобы получить сколько-нибудь хорошую орбиту, потребуются очень малые шаги и, значит, большие затраты времени. На рис. 6.8, б показаны два уточненных варианта, которые учитывают небольшой поворот скорости $\mathbf{v}$ в пределах шага: 2 см надо откладывать перпендикулярно не начальному, а некоторому среднему положению радиус-вектора. Постройте траекторию, пользуясь одним из уточненных методов. Найдите положение

второго фокуса. Проверьте экспериментально постоянство суммы расстояний.

Теперь легко разобраться и с третьим законом Кеплера. Период обращения можно найти, поделив площадь эллипса на заметаемую в единицу времени площадь. Эллипс – это сплюснутый круг: его площадь равна $S = \pi ab$, где b – малая полуось. Из рис. 6.6 видно, что

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \equiv a\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

«Скорость заметания» та же, что на исходной круговой орбите, и равна $vR/2$. Период обращения

$$T = \frac{\pi ab}{vR/2} \equiv \frac{2\pi Rab}{vR^2} = \frac{2\pi R}{v} \cdot \frac{a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{R^2}.$$

Первый множитель – это период T_0 обращения по кругу радиуса R . Как показано при выводе (6.2), $1 - \varepsilon^2 = R/a$. Заменяя $\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ на $\sqrt{R/a}$, получаем

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{a}{R}\right)^{3/2},$$

что и требовалось: квадраты периодов относятся как кубы больших полуосей. Это установлено для данного круга и любого эллипса, который из него получается способом, показанным на рис. 6.5. Для произвольного эллипса подходящий круг (с радиусом, равным параметру эллипса) всегда можно построить. Для любых же двух круговых орбит третий закон Кеплера однозначно связан с законом тяготения (см. п. 6.1). Следовательно, третий закон Кеплера доказан для произвольных орбит.

Согласно (6.3), большая полуось a равна $(p/(1 + \varepsilon) + p/(1 - \varepsilon))/2 = p/(1 - \varepsilon^2)$. Подставим из (6.4) p и ε и получим $a = -GMm/2E$ (напомним, что энергия отрицательна). Для круговой орбиты $E = -GMm/2R$ и как раз получается $a = R$. По третьему закону Кеплера, $T^2 \sim a^3 \sim |E|^{-3}$. Следовательно, от момента импульса при данной энергии период обращения не зависит. Допустим, если запустить со скоростью 9 км/с два снаряда, один вертикально вверх, а другой горизонтально, в точку запуска они вернуться практически одновременно (первый чуть раньше, так как часть его траектории проходит «под землей»).

6.5 Реактивное движение. Траектории космических полетов

Артиллерия и подобные способы не позволяют разогнать тела заметных размеров до космических скоростей. Для этого служит реактивный принцип.

Представим себе тележку массы M_f , нагруженную N снарядами массы m каждый. Снаряды выбрасываются устройством (масса которого включена в M_f) со скоростью u **относительно тележки**. Из-за отдачи тележка разгоняется. Как выгоднее

бросать снаряды – сразу или по очереди – для достижения максимальной скорости тележки V ?

Рассмотрим выбрасывание первого снаряда, который полетит со скоростью v_1 . Тележка приобретет скорость ΔV_1 :

$$mv_1 + (M_f + (N - 1)m)\Delta V_1 = 0, \quad v_1 - \Delta V_1 = u$$

(сохранение импульса и кинематика). Исключая v_1 , находим приращение скорости тележки:

$$\Delta V_1 = \frac{mu}{M_f + Nm}.$$

Словами: отброшенная масса умножается на относительную скорость и делится на суммарную массу до выброса. Аналогично находим следующее приращение скорости:

$$\Delta V_2 = \frac{mu}{M_f + (N - 1)m}.$$

После выброса всех снарядов

$$V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots = u \left(\frac{m}{M_f + Nm} + \frac{m}{M_f + (N - 1)m} + \dots + \frac{m}{M_f + 1 \cdot m} \right).$$

Всего в скобке N слагаемых. Если все снаряды выбросить сразу,

$$V = \frac{Nmu}{M_f + Nm} = u \left(\frac{m}{M_f + Nm} + \frac{m}{M_f + Nm} + \dots + \frac{m}{M_f + Nm} \right).$$

Все слагаемые, кроме первого, в последнем варианте меньше. Оказывается, что по очереди выбрасывать лишние вещи выгоднее.

Заметим, что при единовременном выбросе всегда $V < u$. Поэтому для достижения больших скоростей тележкой нужна по крайней мере такая же скорость выброса. Но тогда лучше разгонять не тележку, а снаряд. При поочередном же выбросе знаменатели дробей уменьшаются, и есть надежда получить конечную скорость больше u . На самом деле выбрасываются из ракеты не «снаряды», а горячие газы. Вместо m правильнее обозначить выброшенную массу через ΔM (M уменьшается), а сумму $M_f + km$ обозначаем текущей массой M (переменная величина). Тогда

$$V = u \cdot \sum \frac{\Delta M}{M} = u \cdot \int_{M_f}^{M_i} \frac{dM}{M} = u \cdot \ln(M) \Big|_{M_f}^{M_i} = u \cdot \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right).$$

Математическое дополнение

Логарифмы

У нас появилось новое обозначение: $\ln$. Вместо того, чтобы гадать, отчего это такой интеграл будет именно **натуральным логарифмом** (так называется эта функция), примем **определение**:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Геометрически логарифм – площадь под кривой $y = 1/x$ (рис. 6.9). Из определения ясно, что $\ln 1 = 0$ (интеграл от 1 до 1 – нулевая площадь). Найдем $\ln 2$; это площадь, явно меньшая 1, но большая 0,5. Разбиваем промежуток от 1 до 2 на 10 частей:

$$\begin{aligned}\ln 2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1,1} \right) \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} \right) \cdot 0,1 + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1,9} + \frac{1}{2} \right) \cdot 0,1 = \\ &= 0,1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \dots + \frac{1}{1,9} + \frac{1}{4} \right) = 0,6938\end{aligned}$$

(проверьте на калькуляторе). Более точно $\ln 2 = 0,6931$. Так можно получить **таблицу логарифмов**:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln x$	0	0,69	1,1	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,2	2,3

При просмотре таблицы можно заметить такие совпадения: $\ln 4 = \ln 2 + \ln 2$, $\ln 6 = \ln 3 + \ln 2$, и т.д. Случайно ли это? Пусть известен $\ln x$. Найдем $\ln 2x$:

$$\ln 2x = \int_1^{2x} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{2x} \frac{dt}{t}.$$

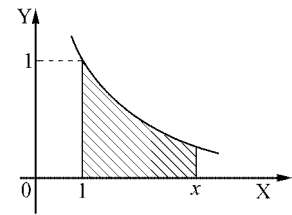


Рис. 6.9.

В последнем интеграле обозначим $t = x \cdot u$, где u – новая переменная интегрирования. Тогда

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln 2 !$$

Геометрически равенство $\int_x^{2x} dt/t = \int_1^2 du/u$ совершенно понятно: высота первой фигуры в x раз меньше, а горизонтальный размер – во столько же раз больше. Мы получили равенство $\ln 2x = \ln 2 + \ln x$. Разумеется, то же самое будет для любого произведения:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y.$$

Словами: **Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей**. До эпохи калькуляторов таблицы логарифмов широко использовались в расчетах, позволяя заменить умножение сложением: числа перемножаются, а их степени складываются (наглядно этот процесс виден на логарифмической линейке). Сами же таблицы вычислены без всяких компьютеров очень остроумными способами (представление о которых дается в курсе Р.Фейнмана).

Где-то между 2 и 3 (ближе к последнему) должно быть такое число e , у которого логарифм равен 1: $\int_1^e (dt/t) = 1$. Легко оценить это число, которое называют **основанием натуральных логарифмов**:

$$1,1 = \ln 3 = \int_1^3 \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{dt}{t} + \int_e^3 \frac{dt}{t} \approx 1 + \frac{3-e}{3} \Rightarrow e \approx 2,7.$$

Теперь запишем очевидные равенства:

$$\ln e = 1, \quad \ln e^2 = 2, \quad \ln e^3 = 3, \quad \dots \ln e^n = n, \quad \text{и вообще } \ln e^x = x.$$

Оказывается, логарифм числа y можно понимать и как **степень**, в которую надо возвести число e , чтобы получить y . Обычно так и **определяют** логарифм.

График логарифмической функции изображен на рис. 6.10. Логарифм числа, меньшего 1, отрицателен, например, $\ln 0,1 = -2,3026$. Полезно также запомнить, что **логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя**. Вблизи пересечения с горизонтальной осью $\ln(1+x) \approx x$, пока $x \ll 1$. При больших x логарифм растет крайне медленно ($\ln 10^2 = 4,6$, $\ln 10^3 = 6,9$, $\ln 10^4 = 9,2$, $\ln 10^6 = 13,8$). Логарифм $\ln$ возник у нас естественным (натуральным) образом, отчего и называется **натуральным**. Применяются и другие логарифмы, взятые по другому основанию, например, десятичный ($\lg 10 = 1$, $\lg 10^2 = 2, \dots$ т.е. $10^{\lg x} = x$). Десятичный логарифм меньше натурального в $2,3026 = \ln 10$ раз: $10^x = e^{x \ln 10}$.

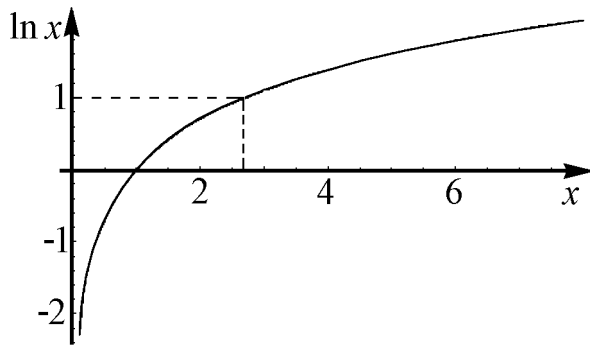


Рис. 6.10.

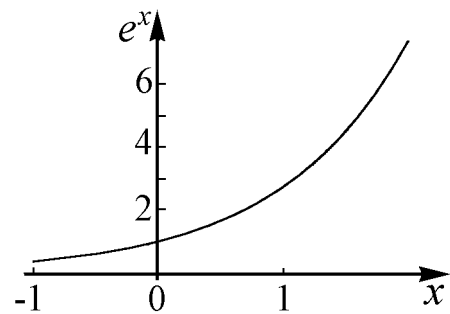


Рис. 6.11.

Экспонента

Экспонента, или экспоненциальная функция $e^x \equiv \exp(x)$ – это попросту функция, обратная логарифму:

$$e^{\ln x} = x, \quad \ln(e^x) = x.$$

Она тоже удобнее (натуральнее), чем более общая **показательная** функция (10^x и т.д.). Замечательно, что производная от экспоненты равна той же самой экспоненте. Действительно, найдем, как производную от сложной функции,

$$\frac{d(\ln e^x)}{dx} = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{d(e^x)}{dx} = 1, \quad \Rightarrow \frac{d(e^x)}{dx} = e^x,$$

поскольку $\ln e^x = x$. В физике чаще в показателе имеется еще коэффициент: $d(e^{kx})/dx = k \cdot e^{kx}$.

В противоположность логарифму, экспонента – очень быстро растущая функция:

x	0	1	2	3	4	10
$\exp(x)$	1	2,72	7,34	20,1	54,6	$2,2 \cdot 10^4$

Для отрицательных x $e^x < 1$. С ростом абсолютного значения отрицательного аргумента экспонента очень быстро спадает (например, $e^{-10} = 1/e^{10}$). Вблизи нуля $e^x \approx 1 + x$. График экспоненты изображен на рис. 6.11. Как и полагается для обратных функций, графики логарифма и экспоненты зеркально симметричны относительно прямой $y = x$.

Логарифм и экспоненту можно увязать еще одним поучительным способом. Вспомним наше определение логарифма через интеграл. Но ведь это интеграл от степенной функции, казалось бы, элементарный: $\int t^n dt = t^{n+1}/(n+1)$. Не тут-то было: в нашем случае $n+1 = 0$! Чтобы не делить на ноль, найдем почти такой же интеграл

$$\int_1^x t^\alpha \frac{dt}{t} = \int_1^x t^{\alpha-1} dt = \frac{t^\alpha}{\alpha} \Big|_1^x = \frac{x^\alpha - 1}{\alpha}.$$

Пусть $\alpha \rightarrow 0$, так что дополнительный множитель $t^\alpha \approx 1$, и значение интеграла практически равно логарифму:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{x^\alpha - 1}{\alpha} = \ln x,$$

так как $x^\alpha \equiv \exp(\alpha \ln x) \approx 1 + \alpha \ln x$ при малых α . Вот откуда вылезает этот логарифм при интегрировании степени. Кстати, теперь видно, почему не страшно делить на ноль: в числителе тоже ноль. Проверьте этот предел на калькуляторе.

Пусть теперь $x = e$. Тогда $(e^\alpha - 1)/\alpha \approx 1$, и мы получили представление числа e в виде **замечательного предела**:

$$e = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha}.$$

Например,

$$1,1^{10} = 2,594, \quad 1,01^{100} = 2,705, \quad 1,001^{1000} = 2,7169, \quad 1,0001^{10000} = 2,71814.$$

Снова п. 6.5

M_i — это начальная масса «заряженной» ракеты. Видно, что скорость в принципе не ограничена, если масса топлива заметно больше, чем скорость пустой ракеты. Обычно масса M_f задана (приборы или боезаряд, корпус). Тогда легко найти начальную массу, необходимую для достижения конечной скорости V :

$$M_i = M_f \cdot \exp(V/u).$$

Последнюю формулу называют **формулой Циолковского**. Наш довольно длинный вывод, конечно, необязателен. Можно сразу написать закон сохранения импульса:

$$u dM = M dV, \quad \text{или} \quad \frac{dM}{M} = \frac{dV}{u},$$

из которого интегрированием получается та же формула.

Ракета «Союз» с начальной массой 310 т выводит на орбиту 7 т. Отношение масс примерно 44, конечная скорость – 8 км/с. Можно оценить скорость истечения $u \approx 8/\ln(44) = 8/3,8 = 2,1$ км/с. На самом деле скорость истечения $2,5 \div 3$ км/с, но конечная скорость получается меньше, а расход топлива больше из-за влияния веса конструкции (баки, двигатели): сухая масса ракеты 30 т. По дороге лишние детали сбрасываются, как только отпадет в них надобность (многоступенчатая конструкция). Для ракеты «Протон» отношение масс $670 \text{ т}/20 \text{ т} = 33,5$ и $u \approx 8/\ln(33,5) = 8/3,5 = 2,3$ км/с. Можно считать, что это «эффективная» скорость истечения, учитывающая потери из-за неидеальной конструкции.

Считая, что скорость истечения для отечественных ракет 2,2 км/с, оценим стартовую массу для достижения второй космической скорости: $M_i = M_f \cdot \exp(11/2,2) = M_f \cdot \exp(5) = 7,3 \cdot 20 \cdot M_f = 150 M_f$. (Полезно помнить, что $\exp(3) = 20$ и $\exp(2) = 7,3$). Чтобы отправить одну тонну на бесконечность, надо сжечь 150 тонн. Если мы хотим слетать на Марс за неделю, понадобится скорость порядка $50 \cdot 10^6 / (7 \cdot 24 \cdot 3600) = 80$ км/с, и для разгона понадобится $\exp(35) = 10^{15}$ тонн на каждую тонну веса. Ясно, что такие скорости недостижимы для химических двигателей. Ядерный реактор, нагревающий водород, позволил бы поднять u до 9 км/с, и понадобилось бы «всего» 10^5 тонн (показатель уменьшится втрое). Технический же предел массы ракеты – тысячи тонн. Конечно, хорошо бы иметь фотонные двигатели.

Поэтому космические полеты требуют минимальных приращений скорости. Реактивный принцип неэффективен, но остальные еще хуже. Рассмотрим запуск за пределы Солнечной системы. При скорости запуска V_3 вдали от Земли аппарат будет иметь относительно нее скорость V_{rel} :

$$\frac{mV_{rel}^2}{2} = \frac{mV_3^2}{2} - \frac{GmM_{\oplus}}{R_{\oplus}} = \frac{mV_3^2}{2} - \frac{mV_2^2}{2},$$

где V_2 – вторая космическая скорость. С учетом движения Земли по орбите со скоростью $V_E = 30$ км/с аппарат в системе Солнца имеет максимум $V_E + V_{rel}$, если запущен по полету Земли. Скорость V_E – это вроде первой космической (точнее, круговой) на орбите Земли; если ее умножить на $\sqrt{2}$, получится аналог второй космической, достаточной, чтобы покинуть Солнечную систему. Имеем $V_{rel} = 30 \cdot (\sqrt{2} - 1) = 12$ км/с, тогда третья космическая скорость $V_3 = \sqrt{11^2 + 12^2} \cong 16$ км/с. При этом полет происходит по параболе, касающейся орбиты Земли.

Чтобы попасть на Солнце, нужна $V_{rel} \approx 30$ км/с назад по движению; тогда в системе Солнца аппарат остановится (момент импульса $L = 0$). При запуске надо развить $\sqrt{11^2 + 30^2} \approx 31,5$ км/с. Если учесть размер Солнца, надо чуть поменьше, но все равно много и практически недостижимо.

Полет к Юпитеру требует несколько меньших затрат, чем к звездам. Минимальным приращением скорости будет для **гомановской** траектории – половинки эллипса, касающегося орбит Земли и Юпитера (рис. 6.12). Пример расчета: обозначаем скорость в

системе Солнца, набранную после старта с Земли, V_s . В полете сохраняются момент импульса и энергия:

$$V_s R_E = V_f R_J, \quad \frac{V_s^2}{2} - \frac{GM_\odot}{R_E} = \frac{V_f^2}{2} - \frac{GM_\odot}{R_J}.$$

Здесь R_E и R_J – радиусы орбит Земли и Юпитера, V_f – скорость аппарата на подлете к Юпитеру. После отрыва от Земли движемся уже в поле тяготения Солнца (входит $M_\odot$). Получаем

$$V_s = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R_E}} \cdot \sqrt{\frac{2R_J}{R_E + R_J}} = 30 \sqrt{\frac{2 \cdot 5,2}{1 + 5,2}} = 30 \cdot 1,25 = 30 + 7,5 \text{ км/с.}$$

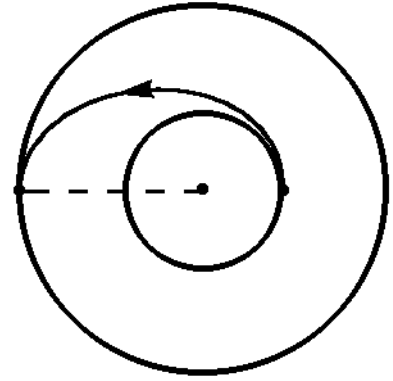


Рис. 6.12.

Заметим, что мы избегаем подставлять G и M при вычислениях, стараясь заменять их на простые комбинации типа круговой скорости $\sqrt{GM/R}$ и стараемся использовать относительные радиусы. Современный школьник, вооруженный калькулятором, наоборот, подставляет все прямолинейно, причем десять человек через долгое время получают десять разных ответов.

Скорость V_{rel} относительно Земли будет 7,5 км/с, и требуемое приращение скорости $\Delta V = \sqrt{11^2 + 7,5^2} = 13,3$ км/с. Видно, что в основном трудно оторваться от Земли, а дальше уже легче. Ракета с начальной массой 1000 т может послать к Юпитеру $1000 \cdot \exp(-6) \approx 2,5$ т. Космонавтика – дорогое удовольствие. Отметим еще, что полет продолжается $((1 + 5,2)/2)^{3/2} \cdot 0,5 = 2,3$ года (3 закон Кеплера). Надо попасть в «окно» запуска, чтобы через это время Юпитер был не где попало на своей орбите, а как раз в нужном месте. Такие окна длительностью около 2 недель повторяются в случае с Юпитером раз в ≈ 11 месяцев. Если запускать в случайное время, расход топлива растет катастрофически.

Откуда следует оптимальность выбранной траектории? Мы уже видели, что большая полуось орбиты определяется только энергией. Направляя приращение скорости ΔV вдоль уже имеющегося движения со скоростью V_{orb} , мы получим максимально возможное при данном ΔV приращение энергии:

$$\Delta E = \frac{m(V_{orb} + \Delta V)^2}{2} - \frac{mV_{orb}^2}{2} = mV_{orb}\Delta V + \frac{m\Delta V^2}{2}.$$

Энергия (вспомним, что она отрицательна) возрастет на ΔE , а по абсолютной величине – уменьшится. Поскольку $a \sim 1/|E|$, максимальной ΔE соответствует максимальная большая полуось a , то есть орбита «достает» дальше от Солнца². При путешествиях

²Эти соображения не вполне строгие. Может случиться, что при некоторой радиальной компоненте скорости за счет уменьшения расстояния в перигелии максимальное удаление от Солнца получится при несколько меньшей полуоси. Более аккуратное доказательство приводится на следующей странице.

к внутренним планетам необходимо, наоборот, уменьшить полуось. При заданном ΔV надо увеличить $|E|$, то есть уменьшить E . Тогда надо направить ΔV назад по движению:

$$\Delta E = \frac{m(V_{orb} - \Delta V)^2}{2} - \frac{mV_{orb}^2}{2} = -mV_{orb}\Delta V + \frac{m\Delta V^2}{2} \approx -mV_{orb}\Delta V,$$

так как обычно $\Delta V \ll V_{orb}$.

На подлете к Юпитеру скорость $V_f = \sqrt{GM_\odot/R_J} \cdot \sqrt{2R_J/(R_E + R_J)}$. Первый множитель – скорость Юпитера по орбите (≈ 13 км/с), второй равен примерно 0,56. Юпитер будет догонять КА со скоростью ≈ 6 км/с. Эту скорость при желании высадиться можно погасить об атмосферу. А можно использовать скорость встречи: облететь вокруг догоняющего Юпитера, причем относительная скорость не изменится. В системе же Солнца «пинок» может составлять максимум двойную относительную скорость (как при упругом лобовом ударе). КА будет уже обгонять Юпитер на 6 км/с, чего хватит для вылета из Солнечной системы. Полет «Вояджеров» (1979 – ...) как раз использовал такие гравитационные маневры. Подходящее расположение планет для такого рейса повторяется довольно редко. Удалось не только сэкономить топливо, но и сократить время полета в несколько раз (полет до Нептуна по классической траектории занимает 30 лет).

Еще интересен полет на Луну. Поскольку Луна далека от Земли ($\gg R_\oplus$), нужно сначала развить практически вторую космическую скорость, обычно в два приема. Ракета «Сатурн-5» с начальной массой 3000 т выводит на низкую орбиту 135 т. Эффективная скорость истечения $8/\ln(3000/135) = 2,58$ км/с выше, чем у советских ракет, так как на второй ступени используется водородно-кислородное топливо. Остается для разгона к Луне $11-8 = 3$ км/с, после разгона уцелеет примерно $e^{-3/2,58} \approx e^{-1,1} = 1/3$, то есть 45 т. Вторая космическая скорость у Луны $\sim \sqrt{gR} = \sqrt{1/6 \cdot 1/3} \approx 1/4$ земной, то есть 2,5 км/с. С учетом разности скоростей КА и Луны по орбите берем примерно 3 км/с, и после посадки масса уменьшается еще втрое (15 т). Для старта с Луны и полета к Земле надо еще 3 км/с, и до Земли долетит 5 т. К счастью, на Земле тормозиться можно бесплатно (об атмосферу), но зато нужна теплозащита. Полное приращение скорости получается $11+3+3 = 17$ км/с (по справочнику – 18), заметно больше, чем для полета (в один конец) к Юпитеру.

Предприятие выглядит рискованным (нет никакого запаса). Заметный выигрыш дала идея отдельного лунного модуля (15 т начинает посадку с орбиты спутника Луны, 5 т – взлетная ступень – стартует с Луны). Общая же масса на орбите вокруг Луны включала еще основной блок (23,3 т, в том числе 18,5 т топлива + командный отсек 5,6 т, который потом летит к Земле). Видно хорошее совпадение оценок с «экспериментом».

Дополнение. Оптимальность траектории Гомана. Пусть в точке старта поперечная компонента скорости v , радиальная u . На финише есть только поперечная w . Законы сохранения:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{w^2}{2} - \frac{GM}{R}, \quad vr = wR.$$

Введем круговую скорость $V_c = GM/r$ и исключим конечную скорость w :

$$\frac{v^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = V_c^2 \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right) - \frac{u^2}{2}.$$

Требуется доказать, что приращение скорости больше, чем для траектории Гомана: $\Delta v^2 \equiv (v - V_c)^2 + u^2 > V_c^2 \cdot (\sqrt{2R/(R+r)} - 1)^2$. Для краткости обозначаем $V = v/V_c$, $U = u/V_c$, $x = r/R$:

$$V^2 = \frac{2}{1+x} - \frac{U^2}{1-x^2}; \quad \Delta V^2 \equiv \left(\sqrt{\frac{2}{1+x} - \frac{U^2}{1-x^2}} - 1\right)^2 + U^2 > \left(\sqrt{\frac{2}{1+x}} - 1\right)^2.$$

В неравенстве U не то уменьшает левую часть (входит под корнем с минусом), не то увеличивает, прибавляясь в конце. Попробуем изолировать U . Раскрываем квадраты скобок:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+x} - \frac{U^2}{1-x^2} + 1 - 2\sqrt{\frac{2}{1+x} - \frac{U^2}{1-x^2}} + U^2 &> \frac{2}{1+x} + 1 - 2\sqrt{\frac{2}{1+x}}, \quad \text{или} \\ 2\sqrt{\frac{2}{1+x} - \frac{U^2 x^2}{1-x^2}} &> 2\sqrt{\frac{2}{1+x} - \frac{U^2}{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Возводим в квадрат:

$$\frac{8}{1+x} + \frac{U^4 x^4}{(1-x^2)^2} - 4\sqrt{\frac{2}{1+x} \frac{U^2 x^2}{1-x^2}} > \frac{8}{1+x} - 4\frac{U^2}{1-x^2}.$$

Убираем одинаковые слагаемые и сокращаем на U^2 и на $1-x^2$ (предполагая $r < R \Leftrightarrow x < 1$, то есть запуск на внешнюю орбиту, например, на Юпитер):

$$\frac{U^2 x^4}{1-x^2} > 4 \left(x^2 \sqrt{\frac{2}{1+x}} - 1 \right).$$

При $x < 1$ левая часть положительна, и легко убедиться, что правая отрицательна. Этим неравенство доказано для $x < 1$. Если же $x > 1$ (полет на внутреннюю орбиту, например, на Меркурий), то при сокращении на $1-x^2$ поменяется знак неравенства, и опять получится искомый результат. Итак, при **однократном** импульсе тяги минимальное приращение скорости достигается для траектории Гомана.

Если допускается **несколько** включений двигателя, можно и еще сэкономить топливо. Например, хотим попасть на Солнце. Сначала запускаем аппарат с орбиты Земли почти на бесконечность, для чего требуется $\Delta v \approx 12$ км/с. В апогелии этого очень длинного эллипса скорость мала, и там нужно лишь слегка притормозить, чтобы момент импульса стал нулевым. Дальше корабль сам упадет на Солнце. Всего требуется около 12 км/с, а при старте с Земли – только третья космическая скорость, т.е. гораздо меньше 30 км/с, необходимых на простейшей гомановской траектории. Зато и путешествие продолжается гораздо дольше.

Можно сначала долететь до Юпитера ($\Delta v = 7,5$ км/с вначале и $0,56 \cdot 13 = 7,3$ км/с на орбите Юпитера), всего 14,8 км/с. Время полета 2,3 года туда плюс 2,1 года падения с орбиты Юпитера сравните со временем падения с земной орбиты (65 суток). Практически долгий полет накладывает серьезные ограничения на полезную нагрузку (падает надежность аппаратуры), почему и стараются придерживаться классических траекторий Гомана.