МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

А. П. Ершов

16 сентября 2005 г.

Глава 4

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Законы сохранения – это в некотором смысле альтернатива динамическому подходу. Конечно, в принципе, динамика Ньютона позволяет решить любую задачу. Но при этом часто возникают препятствия, которые можно разбить на два основных класса:

- Уравнения динамики могут плохо поддаваться решению, особенно для сложных систем. Часто динамическое описание оказывается излишне детализированным. Нас, может быть, ряд тонкостей вообще не интересует, однако мы вынуждены всякий раз составлять большие системы уравнений и пытаться их решать.

- Динамика требует знания всех важных сил. Между тем ясно, что все существующие в природе силы никогда не будут точно известны. В особенности это касается внутренних взаимодействий в любом реальном теле.

Законы сохранения в ряде случаев позволяют избежать указанных трудностей, и практически во всех случаях – сделать хотя бы качественные, но тем не менее полезные выводы о движении.

4.1 Замкнутые системы. Сохранение импульса

Введем понятие **замкнутой** физической системы. Для начала можно понимать под этим систему, совершенно изолированную (хотя бы путем удаления от всех тел) от любых внешних воздействий. Ясно, что практически такого выполнить нельзя. Хотя бы малые воздействия всегда останутся. Более разумно назвать замкнутой систему, для которой внешние воздействия в каком-то смысле малы. В каком – сейчас выяснится.

Для любой системы полный импульс $\boldsymbol{P}$ меняется под действием суммы внешних сил $\boldsymbol{F}$:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta t} = \boldsymbol{F} \qquad \text{или} \qquad \Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} \Delta t \, .$$

Если сумма внешних сил $\boldsymbol{F}$ мала, то незначительным будет и изменение импульса системы $\Delta \boldsymbol{P}$ за некоторое время Δt. Тогда можно считать, что импульс сохраняется, то есть, если и изменяется, то пренебрежимо мало:

$$\boldsymbol{P}(t+\Delta t) = \boldsymbol{P}(t) \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{P}(t_2) = \boldsymbol{P}(t_1)\ .$$

Это и будет **закон сохранения импульса**: конечный импульс системы равен начальному. Разумеется, импульс сохраняется только для замкнутой системы. Видим, что замкнутость – понятие относительное и зависит от внешней силы и времени наблюдения. Так как полного равенства суммы внешних сил $\boldsymbol{F}$ нулю практически не бывает, важно, чтобы произведение $F\Delta t$ было малым по сравнению с характерными значениями импульсов тел системы. Даже маленькая сила в течение длительного времени может заметно изменить полный импульс. Наоборот, если время Δt мало, то и при значительной внешней силе изменение импульса будет малым, то есть приближенно импульс будет сохраняться. Например, часто закон сохранения импульса применяют в задачах с коротким временем взаимодействия тел (удар, выстрел) даже при наличии внешних сил.

Примеры.

1. Если Земля сталкивается с астероидом, то систему (Земля + астероид) можно считать замкнутой на интервале времени порядка недели, хотя на оба тела с большой силой действует Солнце. Теперь рассмотрим эту же систему на промежутке времени в 3 месяца. За это время импульс системы (в основном, конечно, Земли) повернется на прямой угол и его изменение будет существенным: $\Delta P = P\cdot\sqrt{2}$. Тогда, конечно, систему нельзя считать замкнутой.

2. Пусть охотник, стоя в лодке, стреляет под углом α к горизонту. Какую скорость приобретет лодка в результате отдачи?

   Обычно говорят, что в горизонтальном направлении не видно внешних сил, и горизонтальная компонента импульса должна сохраняться. Начальный импульс нулевой, и можно написать равенство импульсов до и после выстрела:

   $$P_x(\text{ до }) = 0 = Mu_x + mv\cos\alpha = P_x(\text{ после })\ ,$$

   откуда $u_x = -mvcos\alpha/M$ (M – сумма масс охотника и лодки). Посмотрим, однако, что будет с вертикальной компонентой. Время выстрела Δt порядка L/v, где L – длина ствола. Подставляя $L = 1$ м и $v = 500$ м/с, получаем $\Delta t \approx 2\cdot 10^{-3}$ с. Характерный импульс по вертикали $P_y = mv\sin\alpha$ при $\alpha = 30^\circ$ равен $0{,}01\cdot 5\cdot 10^2/2 = 2{,}5$ кг·м/с в системе СИ. Чтобы нарушить сохранение вертикального импульса за время выстрела Δt, нужна внешняя сила порядка $P_y/\Delta t = 2{,}5/2\cdot 10^{-3} \approx 10^3 = 100$ кГ. Если пренебрегать горизонтальными силами, то с тем же основанием можно пренебречь и вертикальными: вес лодки и охотника вначале компенсирован архимедовой силой. Поэтому лодка приобретет и вертикальную скорость $u_y = mv\sin\alpha/M$, направленную вниз, а полная скорость лодки будет $u = -mv/M$[1]. Затем лодка начнет погружаться, и только через несколько колебаний (т.е. несколько секунд) она полностью потеряет вертикальный импульс (система станет незамкнутой по вертикали). Решение, пренебрегающее вертикальной скоростью, скорее подходит для стрельбы с бронепоезда, опирающегося на жесткие рельсы. Конечно, мы для упрощения предполагали жесткую связь лодки и охотника.

Встречаются случаи, когда система не полностью замкнута, то есть имеется внешняя сила $\boldsymbol{F} \neq 0$, но все же сохраняется проекция импульса, перпендикулярная $\boldsymbol{F}$. Например, при полете тела в поле тяжести сила $m\boldsymbol{g}$ направлена вертикально, и **горизонтальная** проекция импульса сохраняется (если пренебречь сопротивлением воздуха). При ударе упругого тела о стенку, если нет трения, сохраняется составляющая импульса, параллельная стенке (сила взаимодействия перпендикулярна стенке).

Мы получили закон сохранения импульса из законов Ньютона. Однако в физике часто нельзя однозначно разделить аксиомы и теоремы. Покажем (следуя курсу Р.Фейнмана), что сохранение импульса естественно вытекает из симметрии взаимодействий.

Сначала рассмотрим столкновение двух одинаковых тел с одинаковыми по величине, но противоположно направленными скоростями (рис. 4.1а). Пусть происходит абсолютно неупругий удар, то есть после соударения образуется единое тело. Очевидно из симметрии, что получившееся тело после удара будет неподвижным (в исходной системе отсчета). Тогда имеем равенство

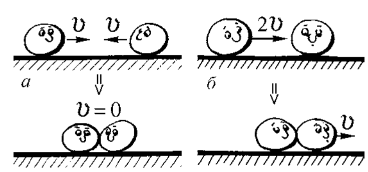

Рис. 4.1.

$$mv + m \cdot (-v) = 0\ .$$

Пока это просто алгебраическое тождество: справа записан результат сложения. Но можно понимать это равенство и как закон сохранения импульса (в данном частном случае). Слева имеем импульс системы до удара, справа – после удара (произведение массы получившегося тела на нулевую скорость) .

Рассмотрим то же соударение в системе отсчета, которая связана со вторым телом до удара. Для перехода в эту систему нужно ко всем скоростям прибавить v (рис. 4.1б), и получим тождество:

$$m \cdot 2v + m \cdot 0 = 2m \cdot v\ .$$

Отсюда видно, что масса суммарного тела должна быть суммой масс «реагентов». Только при этом условии такое равенство выполняется в новой (и несложно показать, что в любой) системе отсчета. Скорость же при столкновении одинаковых тел равна средней арифметической из скоростей до удара.

Теперь пусть сталкивается тело массы $3m$, движущееся со скоростью v, с неподвижным телом m. Представим себе, что тело массы $3m$ составное $(2m+1m)$ и что сначала ударяется передняя масса $1m$. Из предыдущих рассуждений понятно, что получится составное тело массы $2m$, имеющее скорость $v/2$. Теперь пусть налетает со скоростью v оставшаяся масса

[1]На самом деле лодка толкает окружающую воду. Кроме массы M, двинется примерно такая же масса воды. Поэтому довольно большая импульсная сила реакции воды во время выстрела появится. Из-за нее и горизонтальная, и вертикальная скорость уменьшатся, возможно, в два раза, но не до нуля (это означало бы жесткое закрепление лодки), но все равно u_x и u_y имеют один порядок величины.

$2m$ и образуется тело массы $4m$ имеющее (среднюю арифметическую) скорость $3v/4$. Опять можно записать:

$$3m \cdot v + m \cdot 0 = 4m \cdot \frac{3v}{4} \ .$$

Снова суммирование масс позволяет одновременно прибавить к каждой скорости одинаковую величину и таким образом рассмотреть столкновение в любой системе отсчета. Подобные же выкладки можно провести для любой комбинации масс. Оказывается, что сумма произведений масс тел на их скорость равна произведению полной массы образовавшегося тела на его скорость. А это и есть закон сохранения импульса.

На первый взгляд, применение составных тел – это «неосторожный» прием. Что если тела сплошные? На самом деле, хотя такие последовательные удары, конечно, частный случай, но реально тела взаимодействуют отнюдь не сразу всей массой. Например, при ударе стержней по ним от места контакта распространяется волна сжатия, и материал вовлекается во взаимодействие хоть и быстро, но постепенно. Значение закона сохранения импульса в том и состоит, что он выполняется абсолютно независимо от деталей взаимодействия, их можно даже не знать. «Доказать» закон, а лучше сказать – угадать его можно только для специальных частных случаев, зная что-то о взаимодействии. Окончательно же убедиться в верности закона сохранения импульса можно только на практике.

Рассматривая **изменение** импульса, например, каждого из соударяющихся тел по отдельности, можно прийти к необходимости введения внешних воздействий. Силу определим как

$$F = \frac{dP}{dt} \ .$$

Это будет второй закон Ньютона. Далее, из закона сохранения импульса видно, что при взаимодействии пары любых тел $F_{12} = -F_{21}$. Тогда изменения импульсов партнеров будут противоположны. А это уже – частный случай третьего закона Ньютона. Конечно, все эти рассуждения требуют обобщения и опытной проверки. Сейчас эту проверку можно считать выполненной. Достаточно представить себе изобилие действующих механизмов. Все они подчиняются механике Ньютона.

4.2 Закон сохранения энергии

Снова рассмотрим замкнутую (или почти замкнутую) систему. Изменение энергии любой системы равно работе внешних сил:

$$\Delta E = \Delta A \qquad \text{или} \qquad \Delta E = N\Delta t \ .$$

Замкнутой можно считать систему, для которой в течение заданного промежутка Δt мощность внешних сил N достаточно мала. Работа, производимая внутренними силами, остается в системе: она только приводит к перераспределению между видами энергии. Как и с импульсом, получаем закон сохранения

$$E(t_2) = E(t_1)$$

для замкнутой системы. Например, бросим вверх камень со скоростью V . Замкнутой системой будет (камень+Земля). Энергия этой системы

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh \,,$$

если не писать собственных энергий Земли и камня, не меняющихся в таком опыте. Кинетической энергией Земли можно пренебречь. Из закона сохранения энергии $mv^2/2 + mgh = mV^2/2$. Можно найти скорость v на любой высоте в одну строчку: $v = \sqrt{V^2 - 2gh}$. Легко находится и максимальная высота подъема: при $v = 0$ будет $h = V^2/2g$. Из динамики полета этот результат получается гораздо сложнее, причем пришлось бы находить ненужные в этой задаче зависимости h, v от времени.

Если учесть спадание силы тяжести, потенциальная энергия взаимодействия тела с Землей $U = -GMm/r$. На бесконечности (реально большом удалении, то есть на много радиусов Земли R) $U = 0$. Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \,,$$

где r – текущий радиус, v – скорость тела на этом радиусе (обратите внимание на знаки!) С удалением от Земли потенциальная энергия растет, кинетическая падает. Если v упадет до нуля на бесконечности, то скорость запуска V будет называться **второй космической**: $V_2 = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2gR} \approx 11$ км/с. (Первая космическая скорость V_1 – это скорость обращения на низкой орбите, когда центростремительное ускорение $V_1^2/R = g$. Видно, что $V_1 = \sqrt{gR} \approx 8$ км/с). Заметим, что при постоянной силе тяжести улететь на бесконечность нельзя ни при какой скорости: потенциальная яма mgh оказывается бесконечно глубокой. (Подробнее о потенциальных ямах мы поговорим в п. 4.4).

Что будет, когда брошенный вверх камень упадет на Землю? И кинетическая, и потенциальная энергия исчезнут. Можно было бы сказать, что при ударе энергия не сохраняется. Но более плодотворным оказался другой подход. При ударе происходит деформация и нагрев камня и места падения на Земле. Изменению температуры оказалось возможным сопоставить **тепловую энергию**, количество которой строго соответствует рассеявшейся механической. В рамках механики этого доказать нельзя, и мы пока просто примем к сведению существование тепловой энергии. Известно, что возможен и обратный переход, когда тепловая энергия преобразуется в механическую. На этом принципе работают тепловые двигатели, примером которых является паровоз.

Законы сохранения позволяют во многих случаях предсказать результат, не рассматривая сложной динамики. Полезно в любой задаче прежде всего прикинуть, не применимы ли здесь законы сохранения.

Задача. Почему при бросании камня можно не учитывать кинетическую энергию Земли, хотя импульсы Земли и камня по величине одинаковы?

4.3 Соударения тел. Внутренняя энергия системы

Особенно плодотворным оказывается совместное применение законов сохранения энергии и импульса. Часто, не зная деталей процесса, только из этих законов можно сделать важные выводы.

При всякого рода ударах, происходящих за короткое время, лучше всего выполняется условие замкнутости системы. Рассмотрим сначала взаимодействие, при котором кинетическая энергия не уменьшается (то есть не переходит в другие виды). Такое взаимодействие называется **абсолютно упругим**.

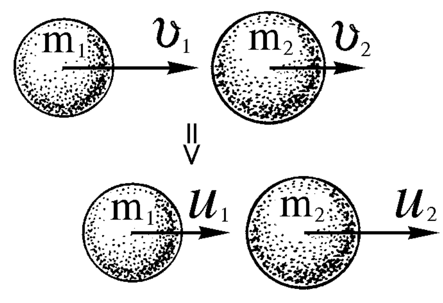

Рис. 4.2.

Сначала ограничимся случаем «центрального» удара, когда тела все время движутся вдоль одной прямой. Примером может служить лобовое столкновение стальных шаров. Пусть тело массы m_1 налетает на тело массы m_2. Скорости тел до удара v_1 и v_2 направлены вдоль оси x (рис. 4.2). Скорости после удара обозначим u_1 и u_2. Поскольку тела образуют замкнутую систему, а удар упругий, сохраняются импульс и энергия:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \ ,$$
$$\frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \ .$$

Исключая u_2, можно получить очень громоздкое квадратное уравнение для u_1. Вместо этого, чтобы упростить вычисления, проведем следующие преобразования. Умножим второе уравнение на 2 и перенесем в левую часть члены, относящиеся к первому телу (с индексом 1), а в правую часть – с индексом 2:

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \ ,$$

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2) \ .$$

Поделим нижнее уравнение на верхнее и получим:

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \ .$$

Последнее уравнение вместе с законом сохранения импульса образуют систему из двух линейных уравнений. Эта система имеет единственное решение:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \ , \qquad u_2 = \frac{2m_1v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2} \ .$$

Выражение для u_2 получается из u_1 заменой индексов 1 на 2 и 2 на 1. Так и должно быть, поскольку исходные уравнения симметричны относительно индексов. Такая проверка на симметрию часто бывает полезна в физике.

Но ведь исходная система сводилась к квадратному уравнению, имеющему два решения! Второе решение мы потеряли при делении уравнений. На нуль делить нельзя, поэтому надо проверить решение

$$u_1 = v_1 \ , \quad u_2 = v_2 \ .$$

Очевидно, что оно удовлетворяет исходным законам сохранения. Но каков его смысл? Частицы сохранили свои начальные скорости и как будто пролетели, не замечая друг друга.

Из законов сохранения никак не следует, что соударение обязательно произойдет. Законы пишутся точно так же в случае, если скорости направлены вдоль одной оси, но частицы движутся не по одной прямой. Поэтому второе решение можно истолковать как промах. Другое истолкование – это начальное состояние (до соударения), которое обязано удовлетворять законам сохранения. Мы видим, что второе решение, которое часто не замечают, имеет глубокий смысл.

Рассмотрим частные случаи. Может быть, самый интересный из них – когда массы тел равны, $m_1 = m_2$. Тогда после удара имеем

$$u_1 = v_2 \ , \quad u_2 = v_1 \ .$$

При абсолютно упругом соударении одинаковых тел они просто обмениваются скоростями. В частности, если на неподвижный ($v_2 = 0$) бильярдный шар налетает «в лоб» другой шар, то налетающий останавливается, а покоившийся приобретает его скорость. Такая картина легко воспроизводится в эксперименте, несмотря на некоторую неупругость удара и вращение шаров.

Другой предельный случай – соударение тела с неподвижной стенкой (которую можно понимать как тело бесконечной массы), то есть $v_2 = 0$ и $m_2 = \infty$. После удара $u_1 = -v_1, \quad u_2 = 0$. Интересен также обратный случай, когда тяжелая стенка налетает на тело ($m_1 = \infty, \quad v_2 = 0$). Тогда получим

$$u_1 = v_1 \ , \quad u_2 = 2v_1 \ .$$

Легкое тело приобретает после удара тяжелого удвоенную скорость. Этот результат легко получить и из предыдущего, если перейти в систему отсчета, где стенка покоится, а затем вернуться в исходную систему.

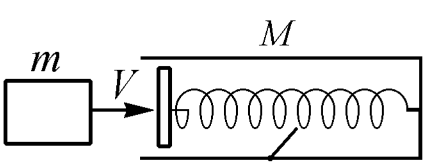

Рис. 4.3.

Теперь рассмотрим более сложную задачу. Пусть масса m со скоростью V налетает на покоящееся тело массы M. Внутри второго тела есть пружина с коэффициентом упругости k. Если пружина сожмется на величину x, то она зафиксируется защелкой (рис. 4.3). Энергию сжатия пружины $kx^2/2$ для краткости обозначим Q.

Такая механическая система моделирует неупругий удар, который может происходить в реальных ситуациях. Запишем законы сохранения:

$$mV + 0 = mu_1 + Mu_2 \ ,$$

$$\frac{mV^2}{2} + 0 = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} + Q \ .$$

Можно получить квадратное уравнение, исключив u_1 или u_2. Но полезнее опять обходной путь. Менее громоздкие формулы получаются в системе центра масс (с.ц.м.).

Скорость этой системы V_c равна отношению полного импульса системы тел к ее полной массе:

$$V_c = \frac{mV}{m+M} \ .$$

Для перехода в с.ц.м. надо отнять V_c от каждой скорости:

$$v_1 = V - V_c = \frac{MV}{m+M} \quad \text{и} \quad v_2 = -\frac{mV}{m+M} \ .$$

Полный импульс $mv_1 + Mv_2$ в с.ц.м., разумеется, равен нулю. Импульсы тел до взаимодействия по величине одинаковы и равны

$$\frac{mM}{m+M}V \equiv \mu V \ .$$

Комбинация масс $\mu = mM/(m+M)$ называется **приведенной массой** системы. Отметим, что эта масса, характеризующая систему как целое, отнюдь не будет суммой масс тел. Приведенная масса меньше наименьшей из масс тел, при одинаковых массах $m = M$ получаем $\mu = m/2$.

Из сохранения импульса как во время удара, так и после импульсы тел всегда будут противоположны: $p_1 + p_2 = 0$. Кинетическую энергию запишем через импульсы:

$$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2M} \equiv \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) = \frac{p^2}{2\mu} \ .$$

Опять появилась приведенная масса. Подставляя начальный импульс μV, найдем полную начальную энергию системы в с.ц.м.: $E_0 = \mu V^2/2$. Теперь закон сохранения энергии пишется очень просто:

$$\frac{p^2}{2\mu} + Q = \frac{\mu V^2}{2} \ .$$

Отсюда находим импульс и скорость каждого тела после взаимодействия:

$$p = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{\mu V^2}{2} - Q} \ ,$$

$$u_1' = -\frac{\sqrt{2\mu}}{m}\sqrt{\frac{\mu V^2}{2} - Q} \ , \qquad u_2' = \frac{\sqrt{2\mu}}{M}\sqrt{\frac{\mu V^2}{2} - Q} \ .$$

Выбор знаков ясен: направления скоростей меняются на противоположные. Для обратного перехода в лабораторную систему нужно добавить к каждой скорости V_c:

$$u_1 = \frac{m}{m+M}V - \frac{\sqrt{2\mu}}{m}\sqrt{\frac{\mu V^2}{2} - Q}\ , \qquad u_2 = \frac{m}{m+M}V + \frac{\sqrt{2\mu}}{M}\sqrt{\frac{\mu V^2}{2} - Q}\ .$$

Теперь рассмотрим частные случаи.

1. $Q = 0$ (упругий удар). Хотя Q и стоит в формулах, ничто не мешает считать его нулевым. Скажем, скорости налетающего тела могло не хватить для продавливания пружины до защелки, и пружина вернулась в исходное состояние. Тогда получаем уже знакомые формулы

$$u_1 = \frac{m-M}{m+M}V\ , \qquad u_2 = \frac{2m}{m+M}V\ ,$$

следующие из решения задачи об упругом ударе при $v_2 = 0$.

2. $Q > 0$ (неупругий удар). Для этого как минимум надо, чтобы начальная кинетическая энергия в с.ц.м. $\mu V^2/2$ превышала Q. (Может показаться, что нужно $mV^2/2 > Q$, но этого недостаточно: часть энергии налетающего тела идет на разгон второго). Если масса M очень мала, потребуется огромная начальная энергия $mV^2/2 \gg Q$. При малом превышении порога, то есть $\sqrt{\mu V^2/2 - Q} \approx 0$, обе скорости равны V_c, а в с.ц.м. тела останавливаются. Такое решение описывает, например, химическую реакцию, требующую затрат внешней энергии.

3. $Q < 0$. Этот случай описывает реакцию с тепловыделением. Например, при термоядерной реакции дейтерия и трития выделяется значительная энергия $|Q| =$ 17,6 МэВ (17,6 миллионов электронвольт; электронвольт – удобная для атомной физики единица энергии: 1 эВ = $1{,}6{\cdot}10^{-19}$ Дж= $1{,}6{\cdot}10^{-12}$ эрг). Реакция записывается так:

$$^2\mathrm{D} + {}^3\mathrm{T} = {}^4\mathrm{He} + \mathrm{n} + Q\ ,$$

где D – ядро дейтерия (тяжелый водород с массой ядра 2), T – трития (сверхтяжелый водород, масса 3), He – гелия (масса 4), n – нейтрон (масса 1). Поскольку в реакции ожидается значительное выделение энергии, кинетическими энергиями до удара вообще можно пренебречь (они порядка 10 кэВ). В этом случае механическим аналогом будет система с уже сжатой пружиной, легкое прикосновение к которой освобождает запасенную энергию. Тогда можно считать, что мы находимся в системе центра масс. Поскольку импульсы противоположны, быстрее летит легкая частица. Кинетические энергии продуктов $p^2/2m$ делятся обратно пропорционально массам – в отношении $4/5$ к $1/5$. Нейтрон получает основную долю энергии – 14 МэВ , а на долю ядра гелия (α – частицы) остается 3,6 МэВ. Заметим, что только α – частицы нагревают реакционную смесь и способствуют продолжению реакции, а нейтрон улетает из системы практически без взаимодействия, так как он не заряжен. Нейтроны могут использоваться для производства изотопов в т.н. бланкете (англ.: одеяло) либо в военных целях (нейтронная бомба).

Другой пример процесса с выделением энергии – выстрел из пистолета, пушки и пр. Основная энергия передается легкой пуле, но и оружие испытывает отдачу. Если бы масса пистолета равнялась массе пули, то и стрелку, и его противнику причинялся бы примерно одинаковый ущерб.

Из рассмотренной задачи видно, что не вся кинетическая энергия системы может видоизменяться при взаимодействиях. Для произвольной системы суммарная кинетическая энергия

$$K = \sum \frac{m_j v_j^2}{2} \,.$$

Скорость центра масс $\boldsymbol{V} = (\sum m_j \boldsymbol{v}_j)/(\sum m_j)$. Скорость каждой частицы представим как сумму $\boldsymbol{V} + \boldsymbol{u}_j$, где $\boldsymbol{u}_j$ – скорости в с.ц.м. Получаем:

$$K = \sum \frac{m_j V^2}{2} + \sum \frac{m_j u_j^2}{2} + \sum m_j (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{u}_j) \,.$$

Последняя сумма равна нулю (постоянную скорость $\boldsymbol{V}$ можно вынести за знак суммирования, а оставшийся множитель $\sum m_j \boldsymbol{u}_j$ – полный импульс, в системе центра масс по определению равный нулю). Поэтому

$$K = \sum \frac{m_j V^2}{2} + \sum \frac{m_j u_j^2}{2} \,.$$

Первое слагаемое можно истолковать как энергию движения системы как целого со скоростью $\boldsymbol{V}$. Эта часть энергии не зависит от взаимодействий внутри системы и не изменяется со временем. Но она зависит от системы отсчета; ее можно сделать равной нулю, перейдя в систему центра масс. Вторая часть называется **внутренней энергией** системы и может перейти, например, в потенциальную или в тепло. Для рассмотренной выше задачи внутренняя энергия равна $\mu V^2/2$.

Заметим, что такие, вроде бы и примитивные, механические примеры очень способствуют пониманию даже сложных задач. Всегда полезно задачу максимально упростить, чему помогают механические модели.

4.4 Движение в полях. Потенциальные кривые

При заданном силовом поле прямой путь отыскания движения – сначала найти скорость по ускорению, а затем уже координату. Закон сохранения энергии позволяет решить такую задачу «в одно действие», то есть полностью описать движение (а не только найти характерные точки вроде максимальной высоты). Вначале проведем качественный анализ движения в заданном потенциальном поле.

Пусть график $U(x)$ имеет вид, показанный на рисунке 4.4. Закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = E$$

позволяет сразу сделать полезные выводы. Полная энергия E постоянна и задана, а кинетическая энергия положительна. Поэтому движение возможно только при условии $U < E$.

Проведем на рисунке несколько возможных **уровней энергии** E_1, E_2, E_3, . При полной энергии, равной E_1, график U проходит ниже уровня энергии в довольно ограниченной области. В этой **потенциальной яме** только и возможно движение частицы. С приближением к стенке ямы (где $U = E$) кинетическая энергия и, значит, скорость обращаются в нуль. Частица разворачивается и идет назад; движение имеет колебательный характер.

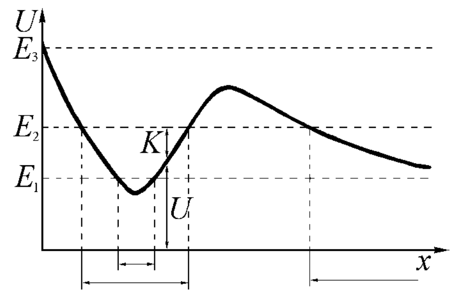

Рис. 4.4.

Если увеличить полную энергию до E_2, то область движения расширяется. Заметим, что справа появилась еще одна разрешенная область, в которой частица либо сразу движется вправо, либо сначала влево, а после отражения от стенки ямы – вправо. Попасть из одной области в другую частица не может.

Наконец, при энергии E_3 (выше **потенциального барьера**) частица может двигаться во всей изображенной области. Возможно, она уйдет на бесконечность, а может быть, отразится от барьеров, которые на рисунке не поместились.

Очень помогает наглядно представить себе движение такая аналогия. Согнем проволочку точно в виде графика $U(x)$ и поставим вертикально. Тогда потенциальная энергия бусины, надетой на проволочку, mgh, как раз будет иллюстрировать состояние частицы в нашем поле. Уровень энергии задается начальным положением бусины: выше она никак не поднимется. В общем, из состояния покоя потенциальная энергия стремится уменьшиться (бусина соскальзывает ниже). Качественно движение бусины (или шарика в яме такой формы) будет похоже на движение частицы.

Перейдем к полному решению задачи о движении частицы. Из закона сохранения энергии находится скорость в зависимости от координаты:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2(E-U)}{m}}\,.$$

Поскольку $v = \Delta x/\Delta t$, можно найти интервал времени для прохождения расстояния Δx:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\Delta x}{\sqrt{E-U}} \quad \text{или} \quad dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E-U}}\,.$$

Интегрируя, находим движение, правда, в виде обратной функции $t(x)$.

Примеры.

1. Пусть потенциальная энергия постоянна. Без нарушения общности можно считать $U = 0$. Тогда

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2E}}\,dx\,, \qquad t = \sqrt{\frac{m}{2E}}\,x\,, \qquad \text{или} \;\; x = \sqrt{\frac{2E}{m}}\,t\,.$$

Поскольку $E = mv^2/2$, это то же самое, что $x = vt$. Энергетический подход по сравнению со «школьным» в этом простом примере не дает особых преимуществ.

2. Рассмотрим тело массы m, прикрепленное к горизонтально расположенной пружине жесткости k. Тогда потенциальная энергия $U = kx^2/2$. Выражение для приращения времени примет вид:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E-U}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\frac{dx}{\sqrt{2E/k - x^2}}\,.$$

Для краткости обозначим $2E/k = x_0$ – это максимальное отклонение массы от положения равновесия. Для зависимости $t(x)$ получим:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}\,.$$

Чтобы найти интеграл (хотя он «табличный»), сделаем замену переменной. Пусть $x = x_0 \sin y$. Тогда имеем:

$$\sqrt{x_0^2 - x^2} = x_0 \cos y\,; \qquad dx = \frac{dx}{dy}\cdot dy = x_0 \cos y \cdot dy\,.$$

Отсюда окончательно получаем:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}}\int\limits_0^y \frac{x_0 \cos y dy}{x_0 \cos y} = \sqrt{\frac{m}{k}}y = \sqrt{\frac{m}{k}}\cdot \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right)\,.$$

Теперь можно найти $x(t)$: $\quad x = x_0 \sin(\sqrt{k/m}\cdot t)$. Получили колебательное движение, чего и можно было ожидать сразу.

Значение законов сохранения выходит за пределы физики, распространяясь даже на биологию, экономику, и т.д. Они порождают новый способ мышления, основа которого – не динамика, а ограничения на нее. В физике же законы сохранения настолько важны, что для любой задачи прежде всего стоит подумать, нельзя ли их применить.

4.5 Законы сохранения и свойства пространства – времени

Рассмотрим довольно неочевидные следствия свойств пространства и времени. Оказывается, однородность пространства тесно связана с законом сохранения импульса, а однородность времени – с законом сохранения энергии.

Как мы выяснили в гл. 2, уравнения движения замкнутой системы частиц имеют вид

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \sum_{k \neq i} \boldsymbol{F}_{ki} \, ,$$

где m_i – массы частиц, $\boldsymbol{v}_i$ – векторы их скоростей, $\boldsymbol{F}_{ki}$ – сила, действующая на частицу i со стороны частицы k. Поскольку система замкнута, внешних сил нет. Для упрощения удобно рассмотреть всего две частицы, движущиеся в одном измерении (вдоль оси x):

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = F_{21} \, , \quad m_2 \frac{dv_2}{dt} = F_{12} \, . \tag{4.1}$$

Ограничимся важным частным случаем, когда сила взаимодействия **потенциальна**, т.е. существует потенциальная энергия, зависящая от координат, $U(x_1, x_2)$, тогда

$$F_{21} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \, , \quad F_{12} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \, .$$

В этих терминах однородность пространства означает попросту, что потенциальная энергия должна зависеть от **разности** координат частиц: $U = U(x_1 - x_2)$. Именно в этом случае (и только в этом) при сдвиге всей системы на некоторое расстояние потенциальная энергия не изменяется и, значит, не изменится поведение системы. Но при такой зависимости легко видеть, что $F_{21} = -F_{12}$ (третий закон Ньютона). Тогда, складывая уравнения движения (4.1), получим

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} = F_{21} + F_{12} = 0 \, , \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right) = 0 \, ,$$

что и означает сохранение (неизменность во времени) полного импульса системы:

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const} \, .$$

Для того, чтобы рассмотреть закон сохранения энергии, запишем выражение, следующее из уравнений динамики (4.1):

$$m_1 v_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 v_2 \frac{dv_2}{dt} = v_1 F_{21} + v_2 F_{12} \equiv -\left(v_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) \, . \tag{4.2}$$

Левая часть уравнения (4.2) – не что иное, как производная по времени кинетической энергии системы K:

$$m_1 v_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 v_2 \frac{dv_2}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) = \frac{dK}{dt} \, .$$

Теперь предположим, что потенциальная энергия не зависит от времени **явно**. Это не значит, что она вообще не изменяется со временем. Например, если частицы соединены пружинкой жесткости k, то при движении пружинка, вообще говоря, изменяет свою длину $L = x_2 - x_1$, из-за чего меняется и $U = k(L - L_0)^2/2$. Но это – **неявная** зависимость, т.е. зависимость «через координаты», а явная могла бы выглядеть так: $U = at(L - L_0)^2/2$, где a – постоянный коэффициент. В отсутствие явной зависимости производную $U(x_1(t), x_2(t))$ по времени можно записать как производную сложной функции:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{dt} = v_1\frac{\partial U}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial U}{\partial x_2}\,.$$

Именно такое выражение стоит в скобках в правой части (4.2). Поэтому имеем

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0\,,$$

т.е. сохраняется полная механическая энергия системы:

$$E = K + U = \mathrm{const}\,.$$

Условием же ее сохранения является отсутствие явной зависимости $U(t)$, что и означает однородность времени. (Если допустить явную зависимость, получилось бы равенство

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0\,,$$

т.е. энергия не сохранялась бы).

Мы использовали довольно ограничительные предположения. В действительности законы сохранения в физике имеют более широкую область применимости. Например, для сохранения импульса не обязательно даже существование потенциальной энергии: импульс прекрасно сохраняется при столкновении пластилиновых шариков. Энергия сохраняется и в таких процессах, как падение камня на песок, когда и потенциальная, и кинетическая энергии обращаются в нуль. (Разумеется, в этом случае надо разумным образом обобщить понятие энергии, включив в нее тепловую составляющую). Но важно осознать тесную связь между импульсом и координатами, а также энергией и временем, которую мы еще будем не раз отмечать. Именно из-за этой связи законы сохранения энергии и импульса имеют наиболее фундаментальный характер и выполняются не только в механике, но и во всех вообще физических процессах[2].

[2]Добавим, что есть еще один фундаментальный закон сохранения **момента импульса**, связанный с изотропностью пространства, т.е. нечувствительностью к поворотам. Момент импульса рассматривается в следующей главе.